Sur certaines singularités non isolées d'hypersurfaces II

Daniel Barlet

Sur certaines singularités d'hypersurfaces II^{+}.

Daniel Barlet *

21/09/06

Abstract.

The aim of the present article is to construct analytic invariants for a germ of an holomorphic function having a one dimensionnal critical locus S. This is done for a large class of such germs containing for instance any quasi-homogeneous germ at the origine. More precisely, aside the Brieskorn's (a,b)-module at the origine and a (locally constant along $S^* := S \setminus \{0\}$) sheaf $\hat{\mathcal{H}}^n$ of (a,b)-modules associated to the transversal hypersurface singularities along each connected component of S^*, we construct also (a,b)-modules "with supports" E_c ans $E'_{c\cap S}$[1].
An interesting consequence of the local study along S^* is the corollary 4.3.5 showing that for a germ with an isolated singularity, the largest sub-(a,b)-module having a simple pole in its Brieskorn-(a,b)-module is independant of the choice of a reduced equation for the corresponding hypersurface germ. Some consequences of this result for isolated singularity germs will be given in a forthcoming paper (see [B.06 a)]).
We also give precise relations between these various (a,b)-modules via the exact commutative diagram of corollary 5.2.3. This is an (a,b)-linear version of the tangling phenomenon for consecutive strata we have previously studied in the "topological" setting (see [B.91], [B.02] and [B.04 b)]) for the localized Gauss-Manin system of f.
Finally we show that in our situation there exists a non-degenerate (a,b)-sesquilinear pairing

$$h : E \times E'_{c\cap S} \longrightarrow |\Xi'|^2$$

where $|\Xi'|^2$ is the space of formal asymptotic expansions at the origine for fiber-integrals. This generalizes the canonical hermitian form defined in [B.85] for the isolated singularity case (for the (a,b)-module version see [B.05 a)]). Its topological

*Barlet Daniel, Institut Elie Cartan UMR 7502
Nancy-Université, CNRS, INRIA et Institut Universitaire de France,
BP 239 - F - 54506 Vandoeuvre-lès-Nancy Cedex.France.
e-mail : barlet@iecn.u-nancy.fr

[1]Remark that, even in the case of a germ with an isolated singularity, the "dual" Brieskorn E_c was not noticed until the recent paper [B.05 a)]. In this case $E'_{c\cap S}$ coíncides with the usual Brieskorn (a,b)-module E.

analogue (for the eigenvalue 1 of the monodromy) is the non-degenerate sesquilinear pairing

$$h : H^n_{c\cap S}(F,\mathbb{C})_{=1} \times H^n(F,\mathbb{C})_{=1} \to \mathbb{C}$$

defined in [B.04 b)] for an arbitrary germ with a one dimensional critical locus (and more generally for a germ such that the eigenvalue 1 of the monodromy acting on the reduced cohomology of the Milnor' fibers only appears along a curve). Then we show this sesquilinear pairing is related to the non-degenerate sesquilinear pairing introduced on the sheaf $\hat{\mathcal{H}}^n$ via the canonical hermitian form of the transversal hypersurface singularities.

AMS Classification 2000: 32-S-25, 32-S-40, 32-S-50.

Key Words : Hypersurface, Non Isolated Singularity, Vanishing Cycles, Tangling of Strata, (a,b)-modules.

Contents

1 Introduction.

Le but du présent article est de construire, pour un germe de fonction holomorphe $\tilde{f} : (\mathbb{C}^{n+1}, 0) \to (\mathbb{C}, 0)$ ayant un lieu singulier de dimension 1, une collection d'invariants analytiques.
Commençons par rappeler que dans le cas d'un germe à singularité isolée à l'origine de $\mathbb{C}^{n+1}$, le réseau de Brieskorn est l'invariant analytique principal.
Il détermine essentiellement le germe considéré dans une déformation à μ constant, voir [Sa.91].
Comme la connexion de Gauss-Manin est régulière, on ne perd aucune information en complétant formellement ce réseau. Ceci conduit naturellement à la notion de (a,b)-module. Une différence importante avec le point de vue micro-local classique est que l'on considère l'opération de primitive $b = \partial^{-1}$ comme *principale*, l'opération a de multiplication par $z = f$ étant mise au second rang. La régularité assure que les filtrations $b-$adiques et $a-$adiques sont équivalentes, ce qui fait que les complétions formelles en a ou en b sont les mêmes. Un (a,b)-module est donc simplement un espace vectoriel de séries formelles (en b) qui est libre de rang fini sur $\mathbb{C}[[b]]$ et qui est stable par l'opérateur a supposé continu pour la topologie $b-$adique et vérifiant $ab - ba = b^2$.

En fait, nous serons amenés à introduire la $\mathbb{C}-$algèbre unitaire $\widehat{\mathcal{A}}$ engendrée par l'opération de primitive $b := \int_0^z$ et l'opération a de multiplication par z et complétée formellement en b. Les (a,b)-modules s'interprètent alors comme les modules sur $\widehat{\mathcal{A}}$ qui sont libres et de rang fini sur la sous-algèbre $\mathbb{C}[[b]]$ de $\widehat{\mathcal{A}}$.

Le premier ingrédient, qui est très général, consistera à introduire, pour une fonction holomorphe réduite f *arbitraire* deux complexes de faisceaux $\big((\hat{\mathrm{K}}\mathrm{er}\,\mathrm{df})^\bullet, \mathrm{d}^\bullet\big)$ et $\big((\tilde{\mathrm{K}}\mathrm{er}\,\mathrm{df})^\bullet, \mathrm{d}^\bullet\big)$ sur l'hypersurface $Y := f^{-1}(0)$, qui correspondent respectivement aux cycles proches et aux cycles évanescents et dont les faisceaux de cohomologie sont naturellement munis de structures de $\widehat{\mathcal{A}}-$modules. Bien sûr, dans le cas d'une fonction à singularité isolée, ces faisceaux de cohomologie redonnent le (a,b)-module de Brieskorn, c'est à dire le complété formel du module de Brieskorn "usuel".
Dans le cas d'une fonction admettant un lieu singulier de dimension 1, le complexe $\big((\hat{\mathrm{K}}\mathrm{er}\,\mathrm{df})^\bullet, \mathrm{d}^\bullet\big)$ n'aura que deux faisceaux de cohomologie en degrés n et $n+1$ et ils sont supportés par la courbe singulière S. Sous notre hypothèse (HH) nous montrons que le faisceau de cohomologie $\hat{\mathcal{H}}^n$ est un système local de (a,b)-modules sur S^*, et que ce faisceau n'a pas de section non nulle à support l'origine. Ce système local de (a,b)-modules sur S^* est décrit par la donnée d'un (a,b)-module sur chaque composante connexe de S^* et d'un automorphisme de monodromie. Pour chaque composante connexe de S^* nous relions la fibre de ce système local au (a,b)-module de Brieskorn de l'hypersurface à singularité isolée transverse. Ce calcul est explicite sous notre hypothèse (H II). La détermination de l'automorphisme de monodromie, simple dans le cas quasi-homogène, est en général plus délicat.

Le faisceau de cohomologie $\hat{\mathcal{H}}^{n+1}$ est plus compliqué car il n'est pas, en général concentré à l'origine, et il n'est pas non plus de type fini sur $\mathbb{C}[[b]]$. Cependant nous montrons que sous notre hypothèse (HH), ses sections à support l'origine sont de type fini sur $\mathbb{C}[[b]]$ et permettent de construire un (a,b)-module, noté E. Dans le cas d'une singularité isolée, on retrouve le (a,b)-module de Brieskorn, et le faisceau $\hat{\mathcal{H}}^n$ est nul.
Si $c \cap S$ désigne la famille des fermés qui rencontrent S en un compact, l'hypercohomologie à support dans $c \cap S$ en degré $n+1$ du complexe $\big((\tilde{\mathrm{K}}\mathrm{er}\,\mathrm{df})^\bullet, \mathrm{d}^\bullet\big)$ nous fournit, sous notre hypothèse (HH), un autre (a,b)-module $E'_{c\cap S}$. On obtient alors une suite exacte de $\widehat{\mathcal{A}}-$modules, conséquence de l'aspect sphérique de la suite spectrale d'hypercohomologie :

$$0 \to H^1_{\{0\}}(S, \hat{\mathcal{H}}^n) \xrightarrow{j} E'_{c\cap S} \xrightarrow{can_{c\cap S}} E \xrightarrow{\theta} H^2_{\{0\}}(S, \hat{\mathcal{H}}^n). \qquad (*)$$

La non nullité des applications j et θ traduit le fait que le complexe $\big((\tilde{\mathrm{K}}\mathrm{er}\,\mathrm{df})^\bullet, \mathrm{d}^\bullet\big)$ n'est pas quasi-isomorphe à la somme directe de ses deux faisceaux de cohomologie. Ceci donne une version "filtrée" du phénomène d'interaction de strates consécutives étudié dans [B.91], [B.02] et [B.04 a)]. On notera que dans ces articles, on pouvait traiter séparément les différentes valeurs propres de la monodromie des cycles

évanescents car on se permettait de localiser "en f", c'est à dire que l'on y considérait des complexes de formes méromorphes à pôles dans $Y = f^{-1}(0)$. Ceci n'est plus possible dans l'étude présente car, en général, un (a,b)-module régulier qui n'est pas à pôle simple, ne se décompose pas suivant les valeurs propres de $b^{-1}a = \partial_z.z$ comme c'est le cas pour le complexe des cycles évanescents.
Le second ingrédient que nous introduisons ici, sous l'hypothèse (HH), est une application (a,b)-sesquilinéaire hermitienne localement constante non dégénérée

$$\underline{k} : \hat{\mathcal{H}}_{|S^*} \times \hat{\mathcal{H}}_{|S^*} \to \underline{\mathbb{C}}_{S^*} \otimes |\Xi'|^2$$

où $|\Xi'|^2 := \sum_{\alpha\in]-1,0]\cap\mathbb{Q}, j\in\mathbb{N}} |s|^{2\alpha}.(Log|s|^2)^j.\mathbb{C}[[s,\bar{s}]]$ est muni d'opérations $a, b, conj$ données respectivement par la multiplication par s, la primitive en s sans constante et la conjuguaison complexe. Cette forme hermitienne est induite par la forme hermitienne canonique (voir [B.85], [B.97] ou [B.05 a)]) de la singularité isolée transverse sur chaque composante connexe de S^*. On déduit de cette application (a,b)-sesquilinéaire faisceautique, par intégration sur le cycle fondamental de S^* (qui, par définition, est la classe d'homologie obtenue en coupant S^* par une sphère centrée à l'origine de $\mathbb{C}^{n+1}$ et de rayon assez petit), une application (a,b)-sesquilinéaire non dégénérée

$$k : H^1_{\{0\}}(S, \hat{\mathcal{H}}^n) \times H^2_{\{0\}}(S, \hat{\mathcal{H}}^n) \to |\Xi'|^2.$$

Le troisième ingrédient, qui est aussi valable pour une fonction holomorphe réduite *arbitraire*, est la construction d'une application (a,b)-sesquilinéaire

$$h : E'_{c\cap S} \times E \to |\Xi'|^2$$

qui est définie à partir des développements asymptotiques à l'origine des intégrales fibres associées à f, généralisant la construction de la forme hermitienne canonique dans le cas d'une singularité isolée (voir à nouveau [B. 85]). Nous montrons sous notre hypothèse (HH) que h est non dégénérée et que l' on a la relation suivante entre h, k et les morphismes j et θ de la suite exacte (*)

$$\tilde{h}(\alpha, \theta(\beta)) = k(j(\alpha), \beta) \quad \forall \alpha \in H^1_{\{0\}}(S, \hat{\mathcal{H}}^n) \quad \text{et} \quad \forall \beta \in E.$$

Les formes (a,b)-sesquilinéaires non dégénérées h et k sont à interpréter comme les ingrédients de la dualité micro-locale pour une fonction à lieu singulier de dimension 1. On remarquera que dans le cas d'une fonction à singularité isolée k disparait, que $E'_{c\cap S} = E$ et que h est la forme hermitienne canonique correspond à l'autodualité du (a,b)-module de Brieskorn (voir [Be.00] et [B.05 a)]).

Terminons cette introduction en précisant que le programe décrit ci-dessus n'est complètement mené à bien que pour une classe encore assez restreinte de fonctions à singularité de dimension 1. Cependant cette classe contient beaucoup d'exemples et, en particulier toutes les fonctions quasi-homogènes (à l'origine) à lieu singulier

de dimension 1. Par ailleurs, bon nombre de constructions sont données dans le cas général.
Notons que l'hypothèse (HH) utilisée dans cette seconde version est nettement plus générale que l'hypothèse (H II) qui était utilisée dans la première version de cet article (voir [B.05 b)]).
Il est bon de préciser aussi que les "invariants" introduits dans cet articles sont relativement simples à calculer dans les exemples (modulo le calcul du (a,b)-module de Brieskorn d'une singularité isolée ...) et sont "finis" et "concrets" : un (a,b)-module est déterminé par une $\mathbb{C}[[b]]-$base et l'action de a sur une telle base ; une forme (a,b)-sesquilinéaire est également déterminée par ses valeurs sur des $\mathbb{C}[[b]]-$bases, etc... De plus, nous montrons dans [B.06 b)] que la classe d'isomorphisme d'un (a,b)-module régulier E est déterminée par le $\widehat{\mathcal{A}}-$module $E/b^N.E$ pour N assez grand. Nous donnons aussi une une estimation d'un N convenable en fonction d'invariants numériques simples de E. Rappelons qu'un tel $\widehat{\mathcal{A}}-$module de dimension finie sur $\mathbb{C}$ est simplement la donnée d'un espace vectoriel de dimension finie muni de deux endomorphismes nilpotents a et b vérifiant $ab - ba = b^2$.

Je concluerai en remerciant Masaki Kashiwara pour les nombreuses discussions que nous avons eues à propos de ce travail; elles m'ont permis de clarifier mes idées sur plusieurs points importants. Je souhaite également remercier le RIMS dont l'hospitalité m'a permis de bien avancer dans ces recherches.
Je tiens à remercier également les référés de la première version de cet article ; leurs commentaires et suggestions m'ont bien aidé à rendre cette seconde version bien meilleure que la précédente.

2 $\widehat{\mathcal{A}}-$structure sur les cycles évanescents.

2.1 Énoncé du théorème d'existence des $\widehat{\mathcal{A}}-$structures.

2.1.1 Les complexes $\hat{\mathcal{K}} = \big((\hat{\mathrm{K}}\mathrm{er}\,\mathrm{df})^\bullet, \mathrm{d}^\bullet\big)$ et $\tilde{\mathcal{K}} = \big((\tilde{\mathrm{K}}\mathrm{er}\,\mathrm{df})^\bullet, \mathrm{d}^\bullet\big)$.

Soit X une variété complexe connexe de dimension $n+1 \geq 3$ et soit $f : X \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe non identiquement nulle telle que l'hypersurface définie par $Y := f^{-1}(0)$ soit réduite.
On notera par $\hat{\Omega}^p_X$ le faisceau sur $Y := f^{-1}(0)$ qui est le complété formel (en f) du faisceau Ω^p_X des germes de $p-$formes holomorphes sur X. De façon précise, pour U un ouvert de X, on pose

$$\hat{\Omega}^p_X(U) = \lim_{\infty \leftarrow N} \Omega^p_X(U)/f^N.\Omega^p_X(U).$$

On restreint alors ce faisceau (nul sur $X \setminus Y$) à Y.
On notera simplement par d la différentielle induite sur ce complété formel par la différentielle de de Rham.

On prendra garde que le germe en un point $y \in Y$ du faisceau $\hat{\Omega}^p_X$ n'est pas le complété formel "en f " du germe en y du faisceau Ω^p_X.

Introduisons le sous-complexe de faisceaux $((\hat{\mathrm{K}}er\, df)^\bullet, d^\bullet)$ sur $Y := f^{-1}(0)$ en posant :

$$(\hat{\mathrm{K}}er\, df)^p := Ker\,[\wedge df : \hat{\Omega}^p \longrightarrow \hat{\Omega}^{p+1}]$$

la différentielle d étant induite par la différentielle extérieure de de Rham.
On a un isomorphisme naturel, pour f réduite, en posant $E_1 := \mathbb{C}[[z]].dz$,

$$f^*(E_1) \simeq E_1 \otimes \mathbb{C}_Y \simeq \hat{\mathcal{O}}_X.df \cap Ker\, d \hookrightarrow \mathcal{H}^1\big((\hat{K}er\, df)^\bullet, d^\bullet)\big) \simeq (\hat{K}er\, df)^1 \cap Ker\, d.$$

Placé en degré 1 ce faisceau défini un sous-complexe, que nous noterons $E_1 \otimes \mathbb{C}_Y[1]$, du complexe $\big((\hat{K}er\, df)^\bullet, d^\bullet\big)$.
Nous définirons le complexe $\big((\tilde{K}er\, df)^\bullet, d^\bullet\big)$ comme le quotient

$$\big((\tilde{K}er\, df)^\bullet, d^\bullet\big) := \big((\hat{K}er\, df)^\bullet, d^\bullet\big)/E_1 \otimes \mathbb{C}_Y[1].$$

2.1.2 L'algèbre $\widehat{\mathcal{A}}$.

Notons par $\widehat{\mathcal{A}}$ la $\mathbb{C}-$algèbre $\widehat{\mathcal{A}} := \{\sum_{\nu=0}^{\infty} P_\nu(a).b^\nu,$ avec $P_\nu \in \mathbb{C}[x]\}$ dont le produit est défini par les deux conditions suivantes :

- 1) On a la relation de commutation $a.b - b.a = b^2$.
- 2) La multiplication par a (à gauche ou à droite) est continue pour la filtration $b-$adique[2]

Exemple. Le module libre de rang 1 sur l'anneau des séries formelles à une variable $\hat{\Omega}^1_{\mathbb{C}} := \mathbb{C}[[z]].dz = E_1$ muni des opérations $a :=$ (multiplication par z), et $b :=$ (primitive sans constante)$.dz$, est un $\widehat{\mathcal{A}}-$module (à gauche) qui est isomorphe à $\widehat{\mathcal{A}}/\widehat{\mathcal{A}}.(a-b)$, ou encore au (a,b)-module de rang 1 $E_1 := \mathbb{C}[[b]].e_1$, avec $a.e_1 = b.e_1$.
On trouvera dans [B.95] quelques résultats de base sur la $\mathbb{C}-$algèbre $\widehat{\mathcal{A}}$.

Théorème 2.1.1 *Les complexes* $\big((\tilde{K}er\, df)^\bullet, d^\bullet\big)$ *et* $\big((\hat{K}er\, df)^\bullet, d^\bullet\big)$ *sont canoniquement quasi-isomorphes à des complexes de faisceaux de* $\widehat{\mathcal{A}}-$*modules (à gauche) sur* Y *ayant des différentielles* $\widehat{\mathcal{A}}-$*linéaires.*
De plus, via ces quasi-isomorphismes, la suite exacte

$$0 \to E_1 \otimes \mathbb{C}_Y[1] \to \big((\hat{K}er\, df)^\bullet, d^\bullet\big) \to \big((\tilde{K}er\, df)^\bullet, d^\bullet\big) \to 0$$

correspond à une suite exacte de complexes de faisceaux de $\widehat{\mathcal{A}}-$*modules.*

Ce théorème montre l'existence d'une structure naturelle de $\widehat{\mathcal{A}}-$modules sur tout groupe d'hypercohomologie de ces deux complexes. Il donne également la $\widehat{\mathcal{A}}-$linéarité (à gauche) des applications naturelles entre ces groupes.
La preuve du théorème 2.1.1 nécessitera quelques préliminaires.

[2] remarquer que $\forall k \in \mathbb{N}$ on a $b^k.\widehat{\mathcal{A}} = \widehat{\mathcal{A}}.b^k$, est un idéal bilatère de $\widehat{\mathcal{A}}$.

2.2 Propriétés générales des faisceaux de cohomologie de ces complexes.

Commençons par montrer que les propriétés générales des faisceaux de cohomologie $\mathcal{H}^\bullet$ du complexe $\big((Ker\, df)^\bullet, d^\bullet\big)$ qui sont démontrées dans [B.04 a)] s'étendent aux faisceaux de cohomologie $\hat{\mathcal{H}}^\bullet$ du complexe complété formel "en f" $\big((\hat{K}er\, df)^\bullet, d^\bullet\big)$. Soit X une variété complexe connexe de dimension $n+1 \geq 3$ et soit $f : X \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe non identiquement nulle telle que l'hypersurface définie par $Y := f^{-1}(0)$ soit réduite. Définissons les opérations a et b sur les faisceaux de cohomologie des complexes $\big((\hat{\mathrm{K}}\mathrm{er\,df})^\bullet, \mathrm{d}^\bullet\big)$ et $\big((\tilde{\mathrm{K}}\mathrm{er\,df})^\bullet, \mathrm{d}^\bullet\big)$ respectivement par la multiplication par f et par $df \wedge d^{-1}$. Explicitement, pour les faisceaux de cohomologie de $\big((\hat{\mathrm{K}}\mathrm{er\,df})^\bullet, \mathrm{d}^\bullet\big)$ on a, si $\omega \in (\hat{K}erdf)^p \cap Kerd$ $a[\omega] = [f.\omega]$ et $b[\omega] = [df \wedge \xi]$ où $\omega = d\xi$, ce que l'on peut toujours supposer localement puisque le complexe de de Rham holomorphe (complété) est (localement) exact. On vérifie immédiatement que si on change le choix de ξ ceci ne change pas la classe $[df \wedge \xi]$.

Pour le complexe $\big((\tilde{\mathrm{K}}\mathrm{er\,df})^\bullet, \mathrm{d}^\bullet\big)$ on doit examiner de plus près le cas $p = 1$. En effet on considère maintenant la classe de $\omega \in (\hat{K}erdf)^1 \cap Kerd\big/f^*(E_1)$. Le changement de ξ conduit alors à une fonction g dont la différentielle est dans E_1. Alors g est constante le long des fibres de f. Comme f est réduite, on a $g \in f^*(\mathbb{C}[[z]])$ et donc $g.df \in f^*(E_1)$.

Pour E un espace vectoriel complexe muni d'opérations a et b $\mathbb{C}-$linéaires vérifiant $a.b - b.a = b^2$. Nous définirons

$$B(E) := \cup_{m\in\mathbb{N}}\, Ker\, b^m, \quad \tilde{A}(E) := \cup_{m\in\mathbb{N}}\, Ker\, a^m, \quad A(E) := \{x \in /\mathbb{C}[b].x \subset \tilde{A}(E)\}.$$

Proposition 2.2.1 *Soit* X *une variété complexe connexe de dimension* $n+1 \geq 3$ *et soit*

$$f : X \to \mathbb{C}$$

une fonction holomorphe non identiquement nulle telle que l'hypersurface définie par $Y := f^{-1}(0)$ *soit réduite. Les germes en chaque point des faisceaux de cohomologie des complexes* $\big((\hat{\mathrm{K}}\mathrm{er\,df})^\bullet, \mathrm{d}^\bullet\big)$ *et* $\big((\tilde{\mathrm{K}}\mathrm{er\,df})^\bullet, \mathrm{d}^\bullet\big)$ *vérifient les propriétés suivantes :*

i) $a.b - b.a = b^2$.

ii) Pour tout $\lambda \in \mathbb{C}^*$, $b - \lambda$ *est bijectif dans* E.

iii) $\exists N \in \mathbb{N} \mid \; a^N.A(E) = 0$.

iv) $B(E) \subset A(E) = \tilde{A}(E)$.

v) $\bigcap_{m\in\mathbb{N}} b^m(E) \subset A(E)$.

La preuve est donnée dans [B.04 a)] proposition 2.3.1 (et lemme 2.3.2 pour l'égalité $A(E) = \tilde{A}(E)$) dans le cas des faisceaux de cohomologie $\mathcal{H}^\bullet$ du complexe de faisceaux $(Ker\, df^\bullet, d^\bullet)$ restreint topologiquement à Y, donc sans complétion "en f". La preuve dans le cas complété est tout à fait analogue. ■
Rappelons également, ce qui sera utile pour la suite, que les propriétés i) à v) implique l'annulation de $b^{2N}.A(E)$ et donc l'égalité $A(E) = B(E)$.

Corollaire 2.2.2 *Dans la situation de la proposition 2.2.1 les germes des faisceaux de cohomologie des complexes* $\big((\hat{\mathrm{K}}\mathrm{er}\,\mathrm{df})^\bullet, \mathrm{d}^\bullet\big)$ *et* $\big((\tilde{\mathrm{K}}\mathrm{er}\,\mathrm{df})^\bullet, \mathrm{d}^\bullet\big)$ *sont $b-$séparés et $b-$complets.*

Preuve.. Ceci résulte des deux propriétés générales suivantes, satisfaites par un espace vectoriel complexe E muni de deux endomorphismes a et b vérifiant les conditions i) à v) de la proposition ci-dessus

1. Un tel E est toujours $b-$séparé, dès que $E\big/B(E)$ est $b-$séparé.
2. Si pour un tel E le quotient $E\big/A(E)$ est un (a,b)-module régulier, alors E est $b-$complet.

Remarques.

1. Le quotient $\hat{\mathcal{H}}^p\big/B(\hat{\mathcal{H}}^p)$ est toujours un (a,b)-module (régulier) d'après le théorème 2.3 de [B.S.04]. Donc les deux faits ci-dessus s'appliquent au faisceau $\hat{\mathcal{H}}^p$ pour tout $p \geq 0$ et pour une fonction holomorphe réduite générale.
2. On remarquera que ni l'hypothèse, ni la conclusion de la seconde assertion ci-dessus ne nous apportent d'information sur le sous-espace $A(E) = B(E)$. En particulier, il se peut très bien que $B(\hat{\mathcal{H}}^p)$ ne soit pas de type fini sur $\widehat{\mathcal{A}}$ (ou sur $\mathbb{C}[[a]]$ ce qui revient au même puisqu'il est annulé par b^{2N}). □

Fin de la preuve du corollaire. Prouvons donc les deux assertions ci-dessus. La $b-$séparation de E se déduit immédiatemment des propriétés iii) iv) et v) puisque l'on a $b^{2N}A(E) = 0$ ainsi que $A(E) = B(E)$. En effet, si $x \in \bigcap_{m\in\mathbb{N}} b^m(E)$ on aura $x \in B(E)$ puisque $E\big/B(E)$ est supposé $b-$séparé. On aura donc $b^{2N}.x = 0$; et donc pour tout $k \geq 0$ on aura $x \in b^k.B(E)$. Mais pour $k = 2N$ ceci donne $x = 0$.
Le second fait est conséquence facile du fait que dans un (a,b)-module régulier les filtrations $a-$adiques et $b-$adiques sont équivalentes. ■

2.3 Complexes de $\widehat{\mathcal{A}}-$modules et preuve du théorème 2.1.1.

Notons par $\hat{\Omega}'^{\bullet}_X[[b]]$ le sous-faisceau du faisceau $\hat{\Omega}^{\bullet}_X[[b]]$[3] constitué des séries formelles $\sum_{j=0}^{+\infty} b^j.\omega_j$ vérifiant la condition $df \wedge \omega_0 = 0$.
Soit $(\hat{\Omega}'^{\bullet}_X[[b]], D^{\bullet})$ le complexe de faisceaux de $\widehat{\mathcal{A}}-$modules sur Y, où l'action à gauche de $\widehat{\mathcal{A}}$ et la différentielle $D^{\bullet}$ sont définies par les formules suivantes :

$$\begin{aligned}
&a.(b^j.\omega) = b^j.(f\omega) + j.b^{j+1}.\omega \qquad b.(b^j.\omega) = b^{j+1}.\omega \\
&D(b^j.\omega) = b^j.d\omega - b^{j-1}.df \wedge \omega \quad \forall j \geq 0 \quad \text{et donc} \\
&D(\sum_{j=0}^{+\infty} b^j.\omega_j) = \sum_{j=0}^{+\infty} b^j.(d\omega_j - df \wedge \omega_{j+1})
\end{aligned}$$

On vérifie immédiatement les identités suivantes :

$$a.D = D.a \qquad b.D = D.b \quad \text{et} \quad D^2 = 0.$$

On a un morphisme "naturel" de complexes $i : \big((\hat{\mathrm{K}}\mathrm{er}\, \mathrm{df})^{\bullet}, \mathrm{d}^{\bullet}\big) \to (\hat{\Omega}'^{\bullet}_X[[b]], D^{\bullet})$ défini par l'inclusion de $\hat{\mathcal{K}}^{\bullet} \hookrightarrow \hat{\Omega}'^{\bullet}_X[[b]]$.
L'essentiel du théorème 2.1.1 est donnée par la proposition suivante.

Proposition 2.3.1 *L'application* $\mathcal{H}^p(i) : \hat{\mathcal{H}}^p \to \mathcal{H}^p\big(\hat{\Omega}'^{\bullet}[[b]], D^{\bullet}\big)$ *est injective et a une image dense pour la topologie $b-$adique. C'est donc un isomorphisme $\widehat{\mathcal{A}}-$linéaire, puisque $\hat{\mathcal{H}}^p$ est complet pour la topologie $b-$adique d'après le corollaire de la proposition 2.2.1.*
On a donc ainsi un quasi-isomorphisme $i : \big((\hat{\mathrm{K}}\mathrm{er}\, \mathrm{df})^{\bullet}, \mathrm{d}^{\bullet}\big) \to \big(\hat{\Omega}'^{\bullet}[[b]], D^{\bullet}\big)$ *compatible aux $\widehat{\mathcal{A}}-$structures sur les faisceaux de cohomologie.*

Preuve. Commençons par montrer l'injectivité de $\mathcal{H}^p(i)$.
Soit donc $\alpha \in (\hat{\mathrm{K}}er\, df)^p \cap Ker\, d$ telle que l'on puisse trouver $U := \sum_0^{\infty} b^j.u_j$ dans $\hat{\Omega}'^{p-1}[[b]]$ vérifiant $\alpha = DU$. On a donc les relations suivantes

$$df \wedge u_0 = 0 \quad \alpha = du_0 - df \wedge u_1 \qquad \text{et} \quad du_j - df \wedge u_{j+1} = 0 \quad \forall j \geq 1$$

Pour tout $j \geq 1$ on a donc $[du_j] = b[du_{j+1}]$ dans $\hat{\mathcal{H}}^p$, ce qui, d'après le corollaire 2.2.2, montre que pour tout $j \geq 1$ il existe $\beta_j \in (\hat{K}er\, df)^p$ vérifiant $du_j = d\beta_j$. On peut donc écrire $u_1 = \beta_1 + d\xi_1$ d'après de Rham. On obtient alors

$$\alpha = du_0 - df \wedge d\xi_1 = d(u_0 + df \wedge \xi_1).$$

Ceci montre la nullité de $[\alpha]$ dans $\hat{\mathcal{H}}^p$ puisque $u_0 + df \wedge \xi_1$ est dans $(\hat{\mathcal{K}}er\, df)^{p-1}$. D'où l'injectivité.

[3]Par définition $\hat{\Omega}^{\bullet}_X[[b]](U) := \hat{\Omega}^{\bullet}_X(U)[[b]]$ et donc, le germe en $y \in Y$ de ce faisceau n'est pas $\big(\hat{\Omega}^{\bullet}_y\big)[[b]]$. Une série $\sum_0^{\infty} b^j.\omega_j$ est dans $\big(\hat{\Omega}^{\bullet}_X[[b]]\big)_y$ ssi les germes ω_j admettent un représentant sur un même ouvert contenant y.

Montrons maintenant la densité pour la topologie $b-$adique.
Soit donc $\Omega := \sum_0^\infty b^j.\omega_j \in \Omega'^p[[b]]$ vérifiant $D\Omega = 0$. On a donc les relations

$$d\omega_j - df \wedge \omega_{j+1} = 0 \quad \forall j \geq 0, \quad \text{et} \quad df \wedge \omega_0 = 0.$$

Le même corollaire 2.2.2 montre que, pour tout $j \geq 0$, il existe $\beta_j \in (\hat{K}er\, df)^p$ vérifiant $d\omega_j = d\beta_j$. Fixons $N \in \mathbb{N}$. On a alors

$$D(\sum_0^N b^j \omega_j) = b^N.d\omega_N = D(b^N.\beta_N).$$

Alors $\Omega_N := \sum_0^N b^j\omega_j - b^N.\beta_N$ vérifie : $D\Omega_N = 0$ et $\Omega - \Omega_N \in b^N.\hat{\Omega}'^p[[b]]$.
La suite $([\Omega_N])_{N\in\mathbb{N}}$ converge donc vers Ω dans $\mathcal{H}^p\big(\hat{\Omega}'^\bullet[[b]], D^\bullet\big)$ pour la topologie $b-$adique. De plus comme $\Omega_N \in \hat{\Omega}'^p[b]$, on peut, d'après de Rham, trouver $[\alpha_N]$ dans $\hat{\mathcal{H}}^p$ dont l'image par $\mathcal{H}^p(i)$ est $[\Omega_N]$. En effet, si $\Omega_N := \sum_0^N b^j.w_j$ est de degré N en b et vérifie $D\Omega_N = 0$, on aura $dw_N = 0$ ainsi que $dw_{N-1} = df \wedge w_N$. Donc si on écrit $w_N = dv_N$, 0n aura $d(w_{N-1} + df \wedge v_N) = 0$ ce qui montre que $\Omega_N - D(b^N.v_N)$ est de degré au plus $N-1$ en b. Ceci achève de montrer la densité de l'image pour la topologie $b-$adique.
Mais on sait que $\hat{\mathcal{H}}^p := \mathcal{H}^p\big(((\hat{\mathrm{K}}\mathrm{er}\,\mathrm{df})^\bullet, \mathrm{d}^\bullet)\big)$ est complet pour la topologie $b-$adique d'après le corollaire 2.2.2. Pour conclure, il suffit alors de montrer que $[\alpha] \in \hat{\mathcal{H}}^p$ vérifie $[\alpha] = b[\Omega]$ dans $\mathcal{H}^p\big(\hat{\Omega}'^\bullet[[b]], D^\bullet\big)$ où $\Omega \in \hat{\Omega}'^p$ satisfait $D\Omega = 0$, alors on a $[\alpha] = b[\beta]$ où $\beta \in (\hat{\mathrm{K}}er\, df)^p \cap Ker\, d$.
On part donc d'une égalité

$$\alpha = b.\Omega + DU \quad \text{avec} \quad \Omega = \sum_0^\infty b^j.\omega_j, \quad df\wedge\omega_0 = 0 \quad \text{et} \quad U = \sum_0^\infty b^j.u_j, \quad df \wedge u_0 = 0.$$

On aura donc $\alpha = du_0 - df \wedge u_1$ et $\forall j \geq 1 \quad \omega_{j-1} + du_j - df \wedge uj + 1 = 0$.
Alors $D(u_0 + b.u_1) = \alpha + b.du_1$ montre, puisque $df \wedge \alpha_0 = 0 = df \wedge du_1$, que l'image de $[\alpha] + b.[du_1] \in \hat{\mathcal{H}}^p$ par $\hat{\mathcal{H}}^p(i)$ est nulle. Donc $[\alpha] = -b.[du_1]$ dans $\hat{\mathcal{H}}^p$, ce qui prouve l'assertion désirée.
Maintenant, quitte à passer à une sous-suite, la suite $\big([\alpha_N]\big)_{N\in\mathbb{N}} \in \hat{\mathcal{H}}^p$ dont l'image par $\mathcal{H}^p(i)$ converge vers Ω, vérifie $[\alpha_{N+1}] - [\alpha_N] \in b^N\hat{\mathcal{H}}^p$, grâce à ce que l'on vient de montrer. C'est donc une suite de Cauchy pour la topologie $b-$adique de $\hat{\mathcal{H}}^p$. Alors sa limite s'envoie sur $[\Omega]$.
La compatibilité avec a est claire. La compatibilité avec b résulte de la formule suivante,

$$df \wedge \xi = b.\alpha - D(b.\xi).$$

où $\alpha = d\xi \in (\hat{K}er\, df)^p \cap Ker\, d$. ■

Démonstration du théorème 2.1.1. Il suffit maintenant de constater que le complexe de $\widehat{\mathcal{A}}-$modules $E_1 \otimes \mathbb{C}_Y[1]$ s'injecte par i dans le complexe $\big(\hat{\Omega}'^\bullet[[b]], D^\bullet\big)$, que le quotient est quasi-isomorphe au complexe $\big((\tilde{K}er\, df)^\bullet, d^\bullet\big)$ et donne la suite exacte courte de complexes de l'énoncé. ■

3 Nos hypothèses.

3.1 Énoncés des hypothèses (H 0) , (HH), (H I) et (H II).

Soit $\tilde{f} : (\mathbb{C}^{n+1}, 0) \to (\mathbb{C}, 0)$ un germe non constant de fonction holomorphe où l'entier n sera supposé au moins égal à 2. Le cas $n = 1$ est beaucoup plus simple (f réduite ou non) et est laissé en exercice ; on consultera [B.04 a)] pour une preuve de l'absence de torsion dans ce cas.
Nous noterons par $f : X \to D$ un représentant de Milnor de $\tilde{f}$ à l'origine. Introduisons les hypothèses suivantes :

Définition 3.1.1 (Hypothèse (H 0)) *Nous dirons que l'hypothèse* (H 0) *est vérifiée si le lieu singulier de f, $S := \{x \in X \ / \ df_x = 0\}$, est une courbe de X dont chaque composante irréductible passe par l'origine et telle que $S^* := S \setminus \{0\}$ est lisse et réunion disjointe de disques topologiques épointés.*

L'hypothèse (H 0) sera toujours supposée vérifiée dans la suite de cet article, sauf mention explicite du contraire.

Définition 3.1.2 (Hypothèse (HH)) *L'hypothèse* (H 0) *étant supposée vérifiée, nous dirons que* (HH) *est satisfaite si, pour tout point $p \in S^*$, il existe un germe W de champ de vecteur holomorphe en p et un germe γ de fonction holomorphe en p vérifiant $W.f = \gamma.f$, le champ de vecteur W* **ne s'annulant pas en** *p.*

Nous montrerons plus loin que dès que cette hypothèse est satisfaite en un point $p \in S^*$ elle est satisfaite en chaque point de la composante connexe S^*_p de p dans S^*.

Définition 3.1.3 (Hypothèse (HH+a)) *Nous dirons que* (HH+a) *est satisfaite en p si la condition* (HH) *est satisfaite avec $\gamma \equiv 0$ au voisinage de p.*

Définition 3.1.4 (Hypothèse (HH+b)) *Nous dirons que* (HH+b) *est satisfaite en p si la condition* (HH) *est satisfaite avec $\gamma \equiv 1$ au voisinage de p.*

Chacune des conditions (HH+a) et (HH+b) est également vérifiée tout le long de la composante connexe S^*_p contenant p si elle est vérifiée au voisinage de p.

Enfin nous noterons (H I) le cas où l'hypothèse (HH+a) est satisfaite sur chaque composante connexe de S^* et (H II) le cas où l'une des hypothèses (HH+a) ou (HH+b) est satisfaite sur chaque composante connexe de S^*.
La situation (H I) est celle étudiée dans [B.04 a)]. La situation (H II) correspond au cas étudié dans la première version de cet article [B.05 b)].

3.2 Discussion de ces hypothèses.

Lemme 3.2.1 *Soit f une fonction holomorphe vérifiant* (HH). *Soit S^*_p une composante connexe de S^*. Alors il existe un champ de vecteur W au voisinage de l'origine et une fonction holomorphe γ au voisinage de l'origine, vérifiant $W.f = \gamma.f$ et tel que W ne s'annule pas sur S^*_p.*

PREUVE. Soit $\mathcal{F}$ le sous-faisceau du faisceau des champs de vecteurs holomorphes V sur X qui vérifient $V.f \in (f)$. Ce faisceau est cohérent comme noyau du morphisme de faisceaux cohérents $\mathcal{T}_X \to \mathcal{O}_X\big/(f)$ donné par $V \to V.f$. Il est donc localement engendré par ses sections globales sur X qui est un ouvert de Stein. Soit $W_1, \cdots, W_N$ des sections globales de $\mathcal{F}$ sur X engendrant $\mathcal{F}$ au voisinage de chaque point. Soit Σ l'ensemble des zéros communs à ces sections. L'hypothèse que f vérifie (HH) montre que $\Sigma \subset \{0\}$. Il existe donc un $i \in [1, N]$ tel que W_i ne s'annule pas sur S^*_p. ■

REMARQUES.

- La preuve ci-dessus montre que la condition (HH) est vérifiée sur toute la composante connexe de S^*_p contenant p dès qu'elle est vérifiée en p.
- Il est possible qu'une composante connexe S^*_p de S^* vérifie à la fois les conditions (HH+a) et (HH+b). C'est par exemple le cas pour la fonction $f(x, y, z) = xy^2 + z^3$: outre le champ d'Euler qui donne la condition (HH+b), le champ $W_0 := 2x.\frac{\partial}{\partial x} - y.\frac{\partial}{\partial y}$ donne la condition (HH+a).
- Si f est quasi-homogène à poids dans $\mathbb{Q}^*$, alors (HH+b) est automatiquement vérifiée. En fait, il suffit même que sur chaque composante connexe de S^*, il existe une coordonnée de poids non nul qui ne s' annule pas sur cette composante connexe.
- Sous l'hypothèse (HH+b) pour la composante connexe S^*_p on trouve grâce au lemme ci-dessus un champ de vecteur méromorphe global, dont les pôles ne rencontrent pas S^*_p, ne s'annulant pas sur S^*_p et vérifiant $W.f \equiv f$. □

Lemme 3.2.2 *Soit f une fonction holomorphe vérifiant l'hypothèse* (H 0). *Au voisinage de tout point $p \in S^*$ on peut trouver un système de coordonnées locales $(t, x_1, \cdots, x_n)$ vérifiant*

i) $S^* = \{x = 0\}$ *au voisinage de* p.

ii) S^* *est exactement le lieu des zéros de la 2-forme holomorphe* $dt \wedge df$.

Dans cette situation le complexe des formes $t-$relatives $(\hat{\Omega}^{\bullet}_{/}, (\wedge d_/ f)^{\bullet})$ est acyclique en degrés $\leq n-1$ et son $n-$ième faisceau de cohomologie est libre de rang fini sur $\mathcal{O}_{\mathbb{C}}$ au voisinage de p.

PREUVE. Commençons par choisir un système de coordonnées locales à l'origine $(t, y_1, \cdots, y_n)$ vérifiant les conditions suivantes :

1. $\frac{\partial f}{\partial y_1}, \cdots, \frac{\partial f}{\partial y_n}$ est une suite régulière au voisinage de l'origine.
2. $t : S \to \mathbb{C}$ est finie au voisinage de l'origine.

Près d'un point $p \in S^*$, la restriction de t à S^* est un isomorphisme local. On peut donc trouver des fonctions holomorphes $\varphi_1, \cdots, \varphi_n$ telles que l'on ait

$$S^* = \{y_i = \varphi_i(t), \forall i \in [1, n]\}$$

au voisinage de p. On prend alors $x_i = y_i - \varphi_i(t)$. On remplit alors les deux conditions demandées.
La seconde assertion est conséquence immédiate du fait que la famille des restrictions de f à $t = t_0$ est une déformation à $\mu-$constant (localement sur S^*). ■

REMARQUE. On constate dans la preuve précédente que l'on peut choisir, sous l'hypothèse (H 0), la fonction t globalement au voisinage de l'origine. □

Lemme 3.2.3 *Supposons que la fonction holomorphe f vérifie* (HH). *Soit p un point de $\in S^*$. Alors il existe un système de coordonnées locales $(\tau, x_1, \cdots, x_n)$ tel que $S^* = \{x = 0\} = \{d\tau \wedge df = 0\}$ au voisinage de p, il existe une fonction c holomorphe au voisinage de p et une fonction holomorphe g présentant une singularité isolée à l'origine de $\mathbb{C}^n$ telle que l'on ait*

$$f(\tau, x) = e^{c(\tau,x)}.g(x).$$

PREUVE. on choisit d'abord des coordonnées locales $(t, x_1, \cdots, x_n)$ au voisinage de p vérifiant les conditions du lemme précédent. On écrit alors le champ de vecteur W donné par l'hypothèse (HH)

$$W = a_0.\frac{\partial}{\partial t} + \sum_1^n a_j.\frac{\partial}{\partial x_j}.$$

En fixant $t = t_0$ on obtient que le champ de vecteur $W(t_0) := \sum_1^n a_j(t_0).\frac{\partial}{\partial x_j}$ sur $\{t = t_0\}$ vérifie $W(t_0).f_{t_0} = \gamma(t_0).f_{t_0}$. Comme f_{t_0} a une singularité isolée à l'origine, le champ $W(t_0)$ s'annule à l'origine. On obtient ainsi que le champ W est tangent à S^* et que la fonction holomorphe a_0 est nécessairement inversible près de p. On peut alors la supposer égale à 1 (quitte à renormaliser W). Alors un changement de coordonnées convenable[4] nous ramène au cas où $W = \frac{\partial}{\partial \tau}$. Si $\frac{\partial f}{\partial \tau} = \gamma(\tau, x).f(\tau, x)$ il suffit alors de prendre pour c une fonction holomorphe vérifiant

$$\frac{\partial c}{\partial \tau} = \gamma(\tau, x), \quad (\tau_0, x) \equiv 0$$

où $\tau_0 = \tau(p)$ pour conclure. ■

[4]obtenu en intégrant localement le champ de vecteur W.

4 Le complexe $((\hat{\mathrm{K}}er\, df)^\bullet, d^\bullet)$.

4.1 Annulation des faisceaux de cohomologie.

Notre objectif sera de montrer la proposition suivante.

Proposition 4.1.1 *Sous l'hypothèse* (H 0) *les faisceaux de cohomologie* $\hat{\mathcal{H}}^p$ *du complexe* $((\hat{\mathrm{K}}er\, df)^\bullet, d^\bullet)$ *sont nuls pour* $p \neq 1, n, n+1$.

La preuve utilisera le lemme suivant.

Lemme 4.1.2 *Sous l'hypothèse* (H 0) *on a* $(Ker\, df)^p = df \wedge \Omega^{p-1}$ *pour tout entier* $p \in [0, n-1]$ *ainsi que* $H^i_{\{0\}}(\mathcal{U}, df \wedge \Omega^{p-1}) = 0,\ \forall i \in [0, n-p+1]$ *pour tout ouvert* $\mathcal{U}$ *de Stein de* $\mathbb{C}^{n+1}$ *assez petit.*

Preuve.. Montrons par récurrence sur p que l'on a $(Ker\, df)^p = df \wedge \Omega^{p-1}$ ainsi que $H^i_{\{0\}}(\mathcal{U}, df \wedge \Omega^{p-1}) = 0,\ \forall i \in [0, n-p+1]$ pour tout $p \in [0, n]$. Pour $p = 0$ le résultat est clair. Supposons donc l'assertion prouvée pour $p-1$ avec $p \in [1, n-1]$ et montrons-la pour p.
Commençons par montrer que l'on a $H^i_{\{0\}}(\mathcal{U}, df \wedge \Omega^{p-1}) = 0,\ \forall i \in [0, n-p+1]$. Pour cela utilisons la suite exacte [5]

$$0 \to df \wedge \Omega^{p-2} \to \Omega^{p-1} \to df \wedge \Omega^{p-1} \to 0$$

dont la suite exacte de cohomologie à support l'origine donne l'assertion puisque

$$H^i_{\{0\}}(\mathcal{U}, \Omega^{p-1}) = 0,\ \forall i \in [0, n] \quad \text{ainsi que} \quad H^i_{\{0\}}(\mathcal{U}, df \wedge \Omega^{p-2}) = 0,\ \forall i \in [0, n-p+2]$$

grâce à notre hypothèse de récurrence.
Près d'un point de X^* l'hypothèse (H 0) permet de trouver des coordonnées locales $t, x_1, \cdots, x_n$ telles que le complexe $(\Omega^\bullet_{/}, \wedge d_{/} f^\bullet)$ soit exact en degré au plus égal à $n-1$ (voir 3.2.2). Considérons alors $\alpha \in (Ker\, df)^p$ avec $p \leq n-1$. Écrivons $\alpha = \alpha^p + dt \wedge \alpha^{p-1}$ où α^i est une $i-$forme $t-$relative. Alors

$$df \wedge \alpha = (d_{/} f + \frac{\partial f}{\partial t}.dt) \wedge (\alpha^p + dt \wedge \alpha^{p-1}) = 0$$

donne $d_{/} f \wedge \alpha^p = 0$ et $\frac{\partial f}{\partial t}.\alpha^p = d_{/} f \wedge \alpha^{p-1}$. L'exactitude en degré p du complexe $(\Omega^\bullet_{/}, \wedge d_{/} f^\bullet)$ donne l'existence d'une $(p-1)-$forme relative β^{p-1} vérifiant $\alpha^p = d_{/} f \wedge \beta^{p-1}$. La seconde relation devient $d_{/} f \wedge (\frac{\partial f}{\partial t}.\beta^{p-1} - \alpha^{p-1}) = 0$ et l'exactitude en degré $(p-1)$ cette fois donne l'existence d'une forme $t-$relative γ^{p-2} telle que $\alpha^{p-1} = \frac{\partial f}{\partial t}.\beta^{p-1} + d_{/} f \wedge \gamma^{p-2}$. On aura alors

$$\alpha^p + dt \wedge \alpha^{p-1} = df \wedge (\beta^{p-1} - dt \wedge \gamma^{p-2})$$

[5] qui résulte de l'égalité $(Ker\, df)^{p-1} = df \wedge \Omega^{p-2}$ conséquence de notre hypothèse de récurrence.

ce qui prouve l'exactitude du complexe $(\Omega^\bullet, \wedge df^\bullet)$ en degrés $p \leq n-1$ au voisinage d'un point de X^*.
Il reste à prouver l'égalité $(Ker\, df)^p = df \wedge \Omega^{p-1}$ à l'origine. Mais on une suite exacte de faisceaux

$$0 \to df \wedge \Omega^{p-1} \to (Ker\, df)^p \to \frac{(Ker\, df)^p}{df \wedge \Omega^{p-1}} \to 0$$

La suite exacte de cohomologie à support l'origine donne

$$0 \to H^0_{\{0\}}\big(\mathcal{U}, \frac{(Ker\, df)^p}{df \wedge \Omega^{p-1}}\big) \longrightarrow H^1_{\{0\}}(\mathcal{U}, df \wedge \Omega^{p-1}) \to 0$$

puisque $H^0_{\{0\}}(\mathcal{U}, (Ker\, df)^p) = 0$ et $H^1_{\{0\}}(\mathcal{U}, df \wedge \Omega^{p-1}) = 0$ grâce à la première partie de notre preuve.
On a donc montré que $(Ker\, df)^p = df \wedge \Omega^{p-1} \quad \forall p \in [0, n-1]$. ■

Remarque. L'égalité pour les complétés formels en f

$$(\hat{K}er\, df)^p = df \wedge \hat{\Omega}^{p-1} \quad \forall p \in [0, n-1]$$

s'en déduit immédiatement. □

Preuve de la proposition. La nullité pour $p = 0$ ou $p > n+1$ est claire. Nous allons montrer que $b : \mathcal{H}^p \to \mathcal{H}^p$ est bijective pour $p \in [2, n-1]$. Commençons par montrer qu'elle est injective pour tout $p \in [0, n]$.
Soit $du \in Ker\, df^p \cap Ker\, d$; on a $b[du] = [df \wedge u]$. Alors $b[du] = 0$ si et seulement si on peut trouver $v \in Ker\, df^{p-1}$ tel que $df \wedge u = dv$. Mais comme on a $p-1 \leq n-1$ on aura $Ker\, df^{p-1} = df \wedge \Omega^{p-2}$ d'après le lemme 4.1.2, et on peut écrire $v = df \wedge w$ où $w \in \Omega^{p-2}$. On aura alors $df \wedge (u + dw) = 0$ c'est à dire que $u + dw \in Ker\, df^{p-1}$. Ceci montre que $[du] = 0$ et prouve l'injectivité désirée.

Montrons maintenant que b est surjective pour $p \in [2, n-1]$.

Si $du \in Ker\, df^p \cap Ker\, d$ l'égalité $Ker\, df^p = df \wedge \Omega^{p-1}$ permet d'écrire $du = df \wedge x$ où $x \in \Omega^{p-1}$. Alors $dx \in Ker\, df^p \cap Ker\, d$ et vérifie $b[dx] = [df \wedge x] = [du]$[6] et la surjectivité de b est démontrée.
On en conclut, grâce au théorème 1 de [B.S.04] et à [B.04 a)] puisqu'en chaque point x de S, $\mathcal{H}^p_x$ est un pré-(a,b)-module (voir [B.04 a]) sans $b-$torsion pour lequel le (a,b)-module associé est nul ($E/bE = 0$!) Il est donc nul.
Un raisonnement analogue pour les complétés formels en f donne la nullité des $\hat{\mathcal{H}}^p \quad \forall p \in [2, n-1]$. ■

[6] Remarquer que pour $p = 1$ si $z \in \mathbb{C}[[f]]$ et $du = z.df$ on doit prendre $x = z$ et donc $dx = z'.df$. Alors $b(dx) = (z - z(0)).df$ qui est différent de $z.df$ si $z(0) \neq 0$.

REMARQUES.

1. On a en fait prouvé, sous l'hypothèse (H 0) la nullité des faisceaux de cohomologie $\mathcal{H}^p$ du complexe $((Ker\, df)^\bullet, d^\bullet)$ pour $p \neq 1, n, n+1$.
2. On a également montré l'injectivité de b sur les faisceaux $\mathcal{H}^n$ et $\hat{\mathcal{H}}^n$ et aussi sur les faisceaux $\mathcal{H}^1$ et $\hat{\mathcal{H}}^1$. □

4.2 Calcul via la cohomologie relative.

4.2.1 Cohérence de $\mathbb{E}$.

Dans ce paragraphe on se place sous l'hypothèse (H 0) et l'on suppose donnée une fonction non singulière $t : X \to D$ telle que sa restriction à S fasse de S un revêtement ramifié du disque D de sorte que $S^* = \{dt \wedge df = 0\}$ au voisinage de S^*. On a déja vu plus haut (voir 3.2.2) que sous l'hypothèse (H 0) il existe toujours de telles fonctions t au voisinage de l'origine.
Nous définirons les faisceaux des formes $t-$relatives en posant

$$\Omega^\bullet_/ := dt \wedge \Omega^\bullet_X$$

la différentielle t-relative $d_/$ étant induite par la différentielle de de Rham. Comme t est supposée non singulière le complexe de de Rham $t-$relatif est exact en degrés strictement positif. De plus, grâce à 3.2.2 le complexe $(\Omega^\bullet_/, (\wedge d_/ f)^\bullet)$ est exact en degrés $\leq n-1$.
Introduisons les complétés formels "en f" $(\hat{\Omega}^\bullet_/, (\wedge d_/ f)^\bullet)$ et $(\hat{\Omega}^\bullet_/, d^\bullet_/)$ Ces complexes vérifient encore ces mêmes propriétés d'annulation.

Introduisons également le complexe $(\hat{Ker}\, d_/ f)^\bullet, d^\bullet_/)$ et notons

$$\mathbb{E} := \mathcal{H}^n((\hat{Ker}\, d_/ f)^\bullet, d^\bullet_/) \simeq \hat{\Omega}^n_/ / d_/ f \wedge d_/ \hat{\Omega}^{n-2}_/.$$

C'est un faisceau de $\mathcal{O}_D-$modules. Munissons $\mathbb{E}$ des opérations a et b usuelles: $a[\omega] := [f.\omega]$ et $b[d_/\xi] = [d_/ f \wedge \xi]$. On vérifie immédiatement que ces deux applications sont bien définies, $\mathcal{O}_D-$linéaires et vérifient $ab - ba = b^2$.
En fait nous utiliserons également les opérations a et b définie de façon analogue sur chacun des faisceaux de cohomologie du complexe $(\hat{Ker}\, d_/ f)^\bullet, d^\bullet_/)$ dans la suite. Elles nous aiderons à montrer qu'en fait ces faisceaux de cohomologie sont nuls en degré différent de n.

Théorème 4.2.1 *Sous l'hypothèse* (H 0) *on suppose donnée une fonction non singulière* $t : X \to D$ *telle que sa restriction à* S *fasse de* S *un revêtement ramifié du disque* D *de sorte que* $S^* = \{dt \wedge df = 0\}$ *au voisinage de* S^*. *Alors les faisceaux de cohomologie du complexe* $(\hat{Ker}\, d_/ f)^\bullet, d^\bullet_/)$ *sont nuls en degrés différents de* n. *En degré* n *le faisceau* $\mathbb{E}$ *est un* $\mathcal{O}_D[[b]]-$*module cohérent dont la restriction à* D^* *est localement libre, si le disque* D *est choisi assez petit.*

Nous aurons besoin de quelques résultats préliminaires pour prouver ce théorème.

Lemme 4.2.2 *Dans la situation du théorème 4.2.1 on a l'annulation des groupes*

$$H^i(U \times X', d_/ \hat{\Omega}^j_/) \quad \forall i \geq 1 \quad \text{et} \quad \forall j \geq 0.$$

Preuve. Ceci résulte immédiatement de l'exactitude en degrés strictement positifs du complexe $(\hat{\Omega}^\bullet_/, d^\bullet_/)$, de l'annulation des groupes $H^i(U \times X', \hat{\Omega}^j_/)$ $\forall i \geq 1$ et $\forall j \geq 0$ puisque $U \times X'$ est de Stein, ainsi que de l'annulation des groupes

$$H^i(U \times X', p^{-1}(\mathcal{O}_D)[[f]]) \quad \forall i \geq 1$$

puisque X' est contractible et U de Stein. ■

Rappelons également que notre hypothèse implique les égalités

$$(\hat{\mathrm{K}}er\, d_/ f)^k = d_/ f \wedge \hat{\Omega}^{k-1}_/ \quad \forall k \in [0, n-1] \tag{@}$$

Proposition 4.2.3 *Dans la situation du théorème 4.2.1 supposons que l'on ait pour un entier* $j \in [0, n]$ *la nullité de* $\hat{\mathcal{H}}^{j-1}_/$ *et des groupes* $H^1(U \times X', d_/ f \wedge d_/ \hat{\Omega}^{k-2}_/)$ *pour tout* $k \leq j$.
Alors le faisceau $\hat{\mathcal{H}}^j_/ := \mathcal{H}^j(\hat{K}er\, d_/ f)^\bullet, d^\bullet_/)$ *est* $b-$*séparé et* b *est injective sur* $\hat{\mathcal{H}}^j_/$.

Preuve. On a, grâce à (@) la suite exacte de faisceaux :

$$0 \to d_/ f \wedge d_/ \hat{\Omega}^{j-2}_/ \to (\hat{\mathrm{K}}er\, d_/ f)^j \cap d_/ \hat{\Omega}^{j-1}_/ \to \hat{\mathcal{H}}^j_/ \to 0$$

Notre hypothèse $H^1(U \times X', d_/ f \wedge d_/ \hat{\Omega}^{j-2}_/) = 0$ nous donne la surjectivité de la flèche

$$\Gamma(U \times X', (\hat{\mathrm{K}}er\, d_/ f)^j \cap d_/ \hat{\Omega}^{j-1}_/) \to \Gamma(U \times X', \hat{\mathcal{H}}^j_/).$$

Son noyau s'identifie à $d_/ f \wedge d_/\big(\Gamma(U \times X', \hat{\Omega}^{j-2}_/)\big)$. En effet grâce à l'hypothèse $\hat{\mathcal{H}}^{j-1}_/ = 0$ on a la suite exacte

$$0 \to d_/ f \wedge d_/ \hat{\Omega}^{j-3}_/ \to d_/ \hat{\Omega}^{j-2}_/ \to d_/ f \wedge d_/ \hat{\Omega}^{j-2}_/ \to 0$$

et notre assertion résulte de l'annulation de $H^1(U \times X', d_/ f \wedge d_/ \hat{\Omega}^{j-3}_/)$ et du lemme 4.2.2.
Montrons que b est injective sur $\hat{\mathcal{H}}^j_/$. Si $\alpha = d_/ \xi \in (\hat{\mathrm{K}}er\, d_/ f)^j \cap d_/ \hat{\Omega}^{j-1}_/$ on a $b[\alpha] = [d_/ f \wedge \xi]$. Donc si $b[\alpha] = 0$ on aura $d_/ f \wedge \xi = d_/ f \wedge d_/ \eta$ où $\eta \in \Gamma(U \times X', \hat{\Omega}^{j-2}_/)$ d'après ce que l'on a montré plus haut, ce qui donne $\xi = d_/ \eta - d_/ f \wedge \theta$ grâce à nouveau aux l'égalités (@). On a donc $\alpha = d_/ f \wedge d_/ \theta$ ce qui donne bien la nullité

de $[\alpha]$ dans $\hat{\mathcal{H}}^j_/$.
Montrons maintenant la $b-$séparation de $\hat{\mathcal{H}}^j_/$. Soit $[\omega_0] \in \cap_{\nu=0}^{\infty} b^\nu(\Gamma(U \times X', \hat{\mathcal{H}}^j_/)$.
L'injectivité de b nous donne alors pour chaque $\nu \geq 0$ une unique classe $[\omega_\nu] \in \Gamma(U \times X', \hat{\mathcal{H}}^j_/)$ avec les relations $b[\omega_{\nu+1}] = [\omega_\nu] \quad \forall \nu \geq 0$.
D'après ce qui précède, on peut trouver pour chaque $\nu \geq 0$ une forme $t-$relative $\xi_\nu \in \Gamma(U \times X', \hat{\Omega}^{j-1}_/)$ qui vérifie $[d_/\xi_\nu] = [\omega_\nu]$. Montrons par récurrence sur $\nu \geq 0$ que l'on peut choisir les ξ_ν de manière à ce qu'ils vérifient

$$d_/\xi_\nu = d_/f \wedge \xi_{\nu+1} \quad \forall \nu \geq 0 \quad \text{et} \quad d_/\xi_0 = \omega_0. \tag{@@}$$

En effet si on choisit les ξ_ν pour $\nu \leq p$ avec les conditions demandées pour $\nu \leq p-1$, on aura $d_/\xi_p = d_/f \wedge \xi_{p+1} + d_/f \wedge d_/\eta$. Il suffit alors de remplacer ξ_{p+1} par $\xi_{p+1} + d_/\eta$ pour faire avancer la récurrence.
Posons alors, dans $\Gamma(U \times X, \hat{\Omega}^{j-1}_/)[[\tau]]$:

$$A := \sum_0^\infty \frac{\tau^\nu}{\nu!}\xi_\nu \quad \text{et} \quad B := \sum_0^\infty \frac{\tau^\nu}{\nu!}\xi_{\nu+1}$$

On obtient, grâce aux relations (@@)

$$d_/A = d_/(\tau + f) \wedge B.$$

Comme $d_/(\tau + f) \wedge dt$ ne s'annule pas, il existe des formes $t-$relatives

$$C, D \in \Gamma(U \times X, \hat{\Omega}^{j-2}_/)[[\tau]] + \Gamma(U \times X, \hat{\Omega}^{j-3}_/)[[\tau]].d\tau$$

vérifiant $A = d_/C + d_/(\tau+f) \wedge D$. On en conclut, en regardant le terme indépendant de τ, que l'on a

$$\xi_0 = d_/C_0 + d_/f \wedge D_0.$$

Ceci donne la nullité de $[\omega_0]$ dans $\Gamma(U \times X', \hat{\mathcal{H}}^j_/)$. ∎

Proposition 4.2.4 *Dans la situation du théorème 4.2.1 on a pour chaque entier* $j \in [0, n-1]$ *la propriété suivante :*
$\hat{\mathcal{H}}^j_/ = 0$ *et pour tout disque* $U \subset D$, $H^i(U \times X', d_/f \wedge d_/\hat{\Omega}^{j-1}_/) = 0 \quad \forall i \geq 1$.

Preuve. Montrons par récurrence sur $j \in [0, n-1]$ l'assertion de l'énoncé. Pour $j = 0$ l'assertion est claire puisque le faisceau $\hat{\mathcal{H}}^0_/$ est nul et puisque le faisceau $d_/f \wedge d_/\hat{\Omega}^{-1}_/ \simeq p^{-1}(\mathcal{O}_D)[[f]].d_/f$ n'a pas de cohomologie en degrés strictement positifs sur $U \times X'$ puisque X' est contractible et puisque U est de Stein.
Supposons l'assertion démontrée pour $j \in [0, n-2]$ et montrons-la pour $j+1$.
Considérons les deux suites exactes de faisceaux :

$$0 \to (\hat{\mathrm{K}}er\, d_/ f)^j \cap d_/ \hat{\Omega}_/^{j-1} \to (\hat{\mathrm{K}}er\, d_/ f)^j \xrightarrow{d_/} d_/ f \wedge d_/ \hat{\Omega}_/^{j-1} \to 0 \qquad (1_j)$$

$$0 \to d_/ f \wedge d_/ \hat{\Omega}_/^{j-2} \to (\hat{\mathrm{K}}er\, d_/ f)^j \cap d_/ \hat{\Omega}_/^{j-1} \to \hat{\mathcal{H}}_/^j \to 0 \qquad (2_j)$$

Comme le faisceau $\hat{\mathcal{H}}_/^j$ est nul d'après notre hypothèse de récurrence, on obtient que $H^i(U \times X', (\hat{\mathrm{K}}er\, d_/ f)^j \cap d_/ \hat{\Omega}_/^{j-1}) = 0 \quad \forall i \geq 1$. Le faisceau $(\hat{\mathrm{K}}er\, d_/ f)^j$ étant acyclique en degrés strictement positifs sur l'ouvert de Stein $U \times X'$, on en déduit grâce à (1_j) que $H^i(U \times X', d_/ f \wedge d_/ \hat{\Omega}_/^{j-1}) = 0 \quad \forall i \geq 1$.
Prouvons maintenant la nullité de $\hat{\mathcal{H}}_/^{j+1}$. Comme on a la $b-$séparation en appliquant la proposition précédente (puisque l'on a déjà obtenu l'annulation du groupe $H^1(U \times X', d_/ f \wedge d_/ \hat{\Omega}_/^{j-1})$), la surjectivité de b suffira alors à forcer la nullité de ce faisceau (car l'injectivité est donnée par la proposition précédente).
Soit $\alpha \in (\hat{\mathrm{K}}er\, d_/ f)^{j+1} \cap Ker\, d_/$. Comme $j+1 \leq n-1$ on peut écrire $\alpha = d_/ f \wedge \beta$. Alors $[d_/ \beta] \in \hat{\mathcal{H}}^{j+1}$ vérifie $b[d_/ \beta] = [\alpha]$. Donc b est bien surjective sur $\hat{\mathcal{H}}_/^{j+1}$.
On a donc $\hat{\mathcal{H}}_/^{j+1} = 0$ et ceci achève notre récurrence. ■

Démonstration du théorème 4.2.1. La nullité des faisceaux $\hat{\mathcal{H}}_/^j$ pour tout $j \leq n-1$ résulte de la proposition 4.2.4. La proposition 4.2.3 montre alors que b est injective sur $\hat{\mathcal{H}}_/^n = \mathbb{E}$ et que ce faisceau est séparé pour la topologie $b-$adique. Ce sont les deux premières conditions de la proposition 7.2.2 de l'appendice. Il nous reste essentiellement à vérifier la troisième. Mais comme $\mathbb{E}/b.\mathbb{E} \simeq \mathcal{H}^n((\hat{\mathrm{K}}er\, d_/ f)^\bullet, d_/^\bullet)$ la cohérence sur $\mathcal{O}_D$ de ce quotient est claire. La locale liberté sur D^* de ce faisceau cohérent sur $\mathcal{O}_D$ pour D assez petit est alors immédiate. ■

4.2.2 Définition de ∇.

Définissons maintenant le morphisme de faisceaux de $\mathbb{C}-$espaces vectoriels

$$\nabla : \mathbb{E} \to \mathbb{E}$$

en posant

$$\nabla[d_/ \xi] := [d_/ f \wedge \frac{\partial \xi}{\partial t} - \frac{\partial f}{\partial t}.d_/ \xi].$$

Montrons déja que ce morphisme est bien défini de $\hat{\Omega}_/^n$ dans $\mathbb{E}$.
Si on change le choix de ξ, ce qui revient à remplacer ξ par $\xi + d_/ u$ puisque le complexe de De Rham relatif est localement exact, on ajoutera le terme

$$d_/ f \wedge \frac{\partial d_/ u}{\partial t} = d_/ f \wedge d_/(\frac{\partial u}{\partial t}),$$

puisque $d_/$ et $\frac{\partial}{\partial t}$ commutent; ceci ne change pas l'image dans $\mathbb{E}$. Montrons maintenant que si $d_/ \xi \in d_/ f \wedge d_/ \hat{\Omega}_/^{n-2}$ son image par ∇ est nulle dans $\mathbb{E}$.

On suppose donc que l'on a $d_/\xi = d_/f \wedge d_/v$; on peut écrire, puisque le complexe de de Rham relatif est localement acyclique,

$$\xi = -d_/f \wedge v + d_/u$$

et, compte tenu de ce qui précède, on peut supposer que u est nul. On obtient

$$\begin{aligned}
\nabla(d_/\xi) &= -d_/f \wedge \frac{\partial}{\partial t}\big(d_/f \wedge v\big) - \frac{\partial f}{\partial t}.d_/f \wedge d_/v \\
\nabla(d_/\xi) &= -d_/f \wedge \big[d_/(\frac{\partial f}{\partial t}) \wedge v + \frac{\partial f}{\partial t}.d_/v\big] \\
\nabla(d_/\xi) &= -d_/f \wedge d_/(\frac{\partial f}{\partial t}v) \ \in \ d_/f \wedge d_/\hat{\Omega}^{n-2}_/
\end{aligned}$$

et on trouve bien 0 dans $\mathbb{E}$. Donc ∇ passe bien au quotient.

Remarque. On notera que ni la dérivation $\frac{\partial}{\partial t}$ ni la multiplication par $\frac{\partial f}{\partial t}$ ne sont bien définies dans $\mathbb{E}$, puisque $d_/f \wedge d_/\hat{\Omega}^{n-2}_/$ n'est pas (en général) stable par ces opérations.
Cependant sous l'hypothèse $\frac{\partial f}{\partial t} = f$ on a $(\nabla + a)(d_/\xi) = d_/f \wedge \frac{\partial \xi}{\partial t} = b(\frac{\partial d_/\xi}{\partial t})$ et donc $\frac{\partial}{\partial t} = b^{-1}.(\nabla + a)$ est bien défini sur $\mathbb{P} := \{x \in E_/ \ / \ b^{-1}.ax \in E_/\}$. On retrouve une des deux situations de (H II) considérées dans [B.05 a)]. □

Lemme 4.2.5 *Pour* $\gamma \in \mathcal{O}_D$ *et* $[\omega] \in \mathbb{E}$ *on a*

$$\nabla(\gamma\omega) = \gamma\nabla(\omega) + \frac{\partial\gamma}{\partial t}.b[\omega]. \tag{1}$$

On a également les relations de commutation

$$a\nabla - \nabla a = \nabla b = b\nabla. \tag{2}$$

Preuve. Comme pour $\gamma \in \mathcal{O}(D)$ on a, si $\omega = d_/\xi$:

$$\nabla(\gamma d_/\xi) = \nabla(d_/(\gamma\xi)) = d_/f \wedge \frac{\partial(\gamma\xi)}{\partial t} - \frac{\partial f}{\partial t}d_/(\gamma\xi) = \gamma\nabla(\omega) + \frac{\partial\gamma}{\partial t}.b[\omega].$$

d'où la relation (1).
Si on a $d_/f \wedge \xi = d_/\eta$ alors

$$\nabla(b[d_/\xi]) = \nabla(d_/\eta) = d_/f \wedge \frac{\partial\eta}{\partial t} - \frac{\partial f}{\partial t}.d_/\eta \tag{3}$$

De plus la relation $d_/f \wedge \xi = d_/\eta$ donne

$$\begin{aligned}
d_/(\frac{\partial\eta}{\partial t} - \frac{\partial f}{\partial t}\xi) &= \frac{\partial}{\partial t}(d_/\eta) - \big(d_/(\frac{\partial f}{\partial t}) \wedge \xi + \frac{\partial f}{\partial t}.d_/\xi\big) \\
&= \frac{\partial}{\partial t}\big(d_/f \wedge \xi\big) - d_/(\frac{\partial f}{\partial t}) \wedge \xi - \frac{\partial f}{\partial t}.d_/\xi \\
&= d_/f \wedge \frac{\partial\xi}{\partial t} - \frac{\partial f}{\partial t}.d_/\xi = \nabla(d_/\xi).
\end{aligned}$$

On a donc

$$b\nabla(\omega) = d_/ f \wedge \big(\frac{\partial \eta}{\partial t} - \frac{\partial f}{\partial t}.\xi\big) = d_/ f \wedge \frac{\partial \eta}{\partial t} - \frac{\partial f}{\partial t}.d_/ f \wedge \xi.$$

et, en utilisant (3), on obtient $b\nabla(\omega) = \nabla(b[\omega])$.
Calculons maintenant $\nabla((a+b)[\omega])$. Si $\omega = d_/\xi$ on a $(a+b)(\omega) = d_/(f\xi)$. Donc

$$\begin{aligned}\nabla((a+b)[\omega]) &= d_/ f \wedge \frac{\partial (f\xi)}{\partial t} - \frac{\partial f}{\partial t}.d_/(f\xi)\\ &= f.(d_/ f \wedge \frac{\partial \xi}{\partial t} - \frac{\partial f}{\partial t}.d_/\xi = a\nabla(\omega).\end{aligned}$$

Ceci prouve les relations (2). ■

Remarque. Il est intéressant de noter que les relations (2) traduisent simplement le fait que $b^{-1}\nabla$ commute à a et b alors que la relation (1) montre que $b^{-1}\nabla$ est une $\mathcal{O}_D-$connexion au sens usuel sur $\mathbb{E}[b^{-1}]$. En fait si l'on pose

$$\mathbb{P} := \{x \in \mathbb{E} \ / \ \nabla(x) \in b.\mathbb{E}\}$$

il est facile de vérifier que $\mathbb{P}$ est un sous-$\mathcal{O}_D[[b]]-$module stable par a. Alors l'injectivité de b agissant sur $\mathbb{E}$ permet de définir une application

$$b^{-1}\nabla : \mathbb{P} \to \mathbb{E}$$

qui commute à a et b et est une $\mathcal{O}_D-$connexion.
Ceci sera exploité au paragraphe suivant. □

4.2.3 Étude locale de ∇ sur S^* sous l'hypothèse (H 0).

Proposition 4.2.6 *Définissons les faisceaux sur* $Y = f^{-1}(0)$

$$\mathcal{P}^\bullet := \{\alpha \in \hat{\Omega}^\bullet_/ \ / \ d_/ f \wedge \alpha = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial t}.\alpha \in d_/ f \wedge \hat{\Omega}^{\bullet-1}_/\}.$$

Alors muni de la différentielle induite par la différentielle de de Rham t-relative $d_/$, $(\mathcal{P}^\bullet, d^\bullet_/)$ *est un complexe de faisceaux et on a une suite exacte courte de complexes sur* $Y = f^{-1}(0)$

$$0 \to ((\hat{K}er\, d_/ f)^\bullet, d^\bullet_/)[-1] \xrightarrow{\wedge dt} ((\hat{K}er\, df)^\bullet, d^\bullet) \xrightarrow{\pi} (\mathcal{P}^\bullet, d^\bullet_/) \to 0$$

où l'application π *est la projection sur les formes t-relatives.*

PREUVE. Vérifions déja que $(\mathcal{P}^\bullet, d^\bullet_/)$ est bien un complexe : si $\alpha \in \mathcal{P}^\bullet$ il est clair que $d_/ f \wedge d_/\alpha = 0$. Montrons que $\frac{\partial f}{\partial t}.d_/\alpha$ est dans $d_/ f \wedge \hat{\Omega}^\bullet_/$. On obtient, en dérivant en t la relation $d_/ f \wedge \alpha = 0$ et en appliquant $d_/$ à la relation $\frac{\partial f}{\partial t}.\alpha \in d_/ f \wedge \hat{\Omega}^{\bullet -1}_/$,

$$d_/(\frac{\partial f}{\partial t}) \wedge \alpha + d_/ f \wedge \frac{\partial \alpha}{\partial t} = 0 \qquad \text{et} \quad d_/(\frac{\partial f}{\partial t}) \wedge \alpha + \frac{\partial f}{\partial t}.d_/\alpha \in d_/ f \wedge d_/\Omega^{\bullet -1}_/$$

ce qui montre que $d_/\alpha \in \mathcal{P}^{\bullet +1}$.
La vérification de la commutation aux différentielles est laissée au lecteur.
Passons à l'exactitude. L'injectivité du produit extérieur par dt est claire. Montrons que π est bien définie et surjective. Si $\alpha + dt \wedge \beta \in (\hat{K}er\, df)^\bullet$ avec $\alpha \in \hat{\Omega}^\bullet_/$ et $\beta \in \hat{\Omega}^{\bullet -1}_/$ on aura $d_/ f \wedge \alpha = 0$ et $\frac{\partial f}{\partial t}.\alpha = d_/ f \wedge \beta$, ce qui montre que $\alpha \in \mathcal{P}^\bullet$. Réciproquement, si α vérifie $d_/ f \wedge \alpha = 0$ et $\frac{\partial f}{\partial t}.\alpha = d_/ f \wedge \beta$ avec $\beta \in \hat{\Omega}^{\bullet -1}_/$ on aura $df \wedge (\alpha + dt \wedge \beta) = 0$, d'où la surjectivité de π.
Le noyau de π est clairement formé des éléments de $(\hat{K}er\, df)^\bullet$ de la forme $dt \wedge \beta$ avec $\beta \in \hat{\Omega}^{\bullet -1}_/$. Mais $df \wedge dt \wedge \beta = 0$ équivaut à l'annulation de $d_/ f \wedge \beta$ puisque β est une forme $t-$relative. Ceci complète la vérification de l'exactitude. ■

Lemme 4.2.7 *On a* $\mathcal{H}^n(\mathcal{P}^\bullet, d^\bullet_/) \simeq \mathbb{P} := \{x \in \mathbb{E} \ / \ \frac{\partial f}{\partial t}.x \in b.\mathbb{E}\}$

La preuve de ce lemme est une vérification simple qui est laissée au lecteur.
On remarquera que $\mathbb{P}$ est un sous-$\mathcal{O}_D[[b]]$-module stable par a de $\mathbb{E}$ qui contient $b.\mathbb{E}$.

Proposition 4.2.8 *On a une suite exacte de faisceaux portés par* S

$$0 \to \hat{\mathcal{H}}^n \to \mathbb{P} \xrightarrow{b^{-1}\nabla} \mathbb{E} \to \hat{\mathcal{H}}^{n+1} \to 0$$

où $\hat{\mathcal{H}}^i$ *denote le i-ème faisceau de cohomologie du complexe* $\hat{\mathcal{K}}$. *Elle est compatible aux actions naturelles de* a *et* b *sur ces faisceaux.*

PREUVE. La suite exacte ci-dessus est le "morceau intéressant" de la suite exacte longue de cohomologie de la suite exacte courte de complexes établie au 4.2.6. Le seul point non trivial, modulo ce qui a déja été précisé ci-dessus, est la vérification que le connecteur de cette suite exacte est bien donné par $b^{-1}.\nabla$. Soit $x = d_/\xi \in \mathcal{P}^n$. Écrivons $\frac{\partial f}{\partial t}.d_/\xi = d_/ f \wedge \beta$ avec $\beta \in \hat{\Omega}^{n-1}_/$. Alors $d_/\xi + dt \wedge \beta$ est dans $(\hat{K}er\, df)^n$ et vérifie $\pi(d_/\xi + dt \wedge \beta) = d_/\xi$. Sa différentielle (totale) vaut

$$dt \wedge (d_/(\frac{\partial \xi}{\partial t}) - d_/\beta) = dt \wedge b^{-1}\nabla(d_/\xi)$$

ce qui achève la démonstration du premier point.
Les actions de a et b sur $\mathbb{P}$ étant induites par celles $\mathbb{E}$ elles commutent à $b^{-1}.\nabla$ d'après 4.2.5. La multiplication par f, qui induit l'action de a dans tous

les cas, commute à $\wedge dt, b^{-1}.\nabla$ et π. Il nous reste seulement à vérifier que b est bien compatible aux flèches $\hat{\mathcal{H}}^n \to \mathbb{P}$ et $\mathbb{E} \to \hat{\mathcal{H}}^{n+1}$. Pour la première c'est clair car si $\omega = d\xi \in (\hat{K}er\, df)^n \cap Ker\, d$ on a $b(d\xi) = df \wedge \xi$. Si $\xi = \alpha + dt \wedge \beta$ où α et β sont des formes $t-$relatives, l'image de $[\omega]$ dans $\mathbb{P}$ sera $[d_{/}\alpha]$. On a $b[d_{/}\alpha] = [d_{/}f \wedge \alpha]$ ce qui est bien l'image de $df \wedge \xi = d_{/}f \wedge \alpha + dt \wedge (\frac{\partial f}{\partial t}.\alpha - d_{/}f \wedge \beta)$ dans $\mathbb{P}$.
Pour $[\omega] = [d_{/}\xi] \in \mathbb{E}$ l'image dans $\hat{\mathcal{H}}^{n+1}$ est la classe $[dt \wedge d\xi] = [d(-dt \wedge \xi)]$ dont l'image par b est $[df \wedge (-dt \wedge \xi)] = [dt \wedge df \wedge \xi]$. Il est alors immédiat que l'image par $\wedge dt$ de $b[\omega] = [d_{/}f \wedge \xi]$ est bien cette classe. ■

4.3 Étude locale sur S^* des cohomologies du complexe $\tilde{\mathcal{K}}$ sous l'hypothèse (HH).

4.3.1 Énoncés des résultats.

Le but de ce paragraphe est de démontrer les deux théorèmes suivants.

Théorème 4.3.1 *Sous l'hypothèse* (HH) *le faisceau* $\hat{\mathcal{H}}^n$ *est un faisceau localement constant sur* S^* *de (a,b)-modules réguliers géométriques. Plus précisément, si* g *est une équation de l'hypersurface à singularité isolée transverse à une composante connexe de* S^**, la fibre de* $\hat{\mathcal{H}}^n$ *pour cette composante connexe est isomorphe à un sous-(a,b)-module* G *du module de Brieskorn* E_g *de* g *qui vérifie*

$$F_g \subset G \subset E_g$$

où F_g *désigne le plus grand sous-(a,b)-module à pôle simple de* E_g *(voir 7.1.4).*
Si la composante connexe de S^* *considérée vérifie* $vect_0(f)$ *on a* $G \simeq E_g$*.*
Si la composante connexe de S^* *considérée vérifie* $vect_1(f)$ *on a* $G \simeq F_g$*.*

Théorème 4.3.2 *Sous l'hypothèse* (HH) *le faisceau* $\hat{\mathcal{H}}^{n+1}$ *vérifie sur* S^* *la propriété suivante :*

(PA) *Soient* $V \subset U$ *deux ouverts de* S^**, avec* U *connexe et* V *non vide. Alors la restriction*
. $\Gamma(U, \hat{\mathcal{H}}^{n+1}) \to \Gamma(V, \hat{\mathcal{H}}^{n+1})$ *est injective.*

Les situations locales. Soit $g : X' \to D$ un représentant de Milnor d'un germe de fonction à singularité isolée à l'origine de $\mathbb{C}^n$ avec $n \geq 2$. Nous allons considérer les trois situations locales suivantes

Définition 4.3.3 (Situations locales) .

(L) *Soit* $c : D \times X' \to \mathbb{C}$ *une fonction holomorphe ; définissons la fonction holomorphe sur* $D \times X'$ *en posant* $f(t,x) := e^{c(t,x)}.g(x)$*. Nous supposerons que* $S^* := D \times \{0\}$ *coïncide avec les ensembles* $\{df = 0\}$ *et* $\{dt \wedge df = 0\}$*.*

(L0) *Même situation que* (L) *avec* $c \equiv 0$ *(donc* $\gamma = \frac{\partial c}{\partial t} = 0$*).*

(LI) *Même situation que (L) avec* $c \equiv t$ *(donc* $\gamma = \frac{\partial c}{\partial t} = 1$*).*

On a la description simple suivante du faisceau $\hat{\mathcal{H}}^n$ dans les situations (L), (L0) et (LI), qui implique immédiatement le théorème 4.3.1.

Théorème 4.3.4 *Dans la situation* (L) *il existe un sous-(a,b)-module* G_γ *de* E_g*, contenant* F_g *et un isomorphisme (a,b)-linéaire*

$$q : \hat{\mathcal{H}}^n \to G_\gamma \otimes \underline{\mathbb{C}}_S.$$

Dans la situation (L0) *on a* $G_0 = E_g$.
Dans la situation (LI) *on a* $G_1 = F_g$.

Remarque. Comme le suggère notre notation G_γ la classe d'isomorphisme du (a,b)-module G_γ ne dépend que de la fonction $\gamma := \frac{\partial c}{\partial t}$. En effet, un changement de coordonnées du type $t' = t + \rho(x), y = x$ laisse invariant le champ de vecteur $W = \frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t'}$ et change la fonction c sans changer la fonction $\gamma := \frac{\partial c}{\partial t}$, puisque la relation $W.f = \gamma.f$ est indépendante du choix de la fonction holomorphe ρ. $\square$

Les démonstrations de ces résultats seront données plus loin. Donnons déjà le corollaire facile suivant de 4.3.4 qui est un résultat assez remarquable sur les fonctions à singularité isolée. En effet, il établit un lien précis (et assez fort puisque le quotient $E_g\big/F_g$ est de dimension finie sur $\mathbb{C}$) entre le réseau de Brieskorn de g et celui de $\tilde{g} = h.g$ où h est une fonction holomorphe inversible près de l'origine.

Corollaire 4.3.5 *Soit* $g : X \to D$ *un représentant de Milnor d'un germe de fonction à singularité isolée à l'origine de* $\mathbb{C}^n$*. Soit* $c : X \to \mathbb{C}$ *une fonction holomorphe arbitraire. Notons par* $\tilde{g} := e^{-c}.g$*. Alors la fonction* $\tilde{g}$ *a encore une singularité isolée à l'origine. Notons par* $F_{\tilde{g}}$ *le plus grand sous-(a,b)-module à pôle simple du (a,b)-module* $E_{\tilde{g}}$ *associé au germe à l'origine de* $\tilde{g}$*.*
Alors il existe un isomorphisme (a,b)-linéaire canonique de F_g *sur* $F_{\tilde{g}}$*.*

Preuve. Comme le (a,b)-module $(\hat{\mathcal{H}}^n)_0$ est naturellement associé à la fonction f, on peut le calculer dans le système de coordonnées locales près de l'origine dans $\mathbb{C}^{n+1}$ donné par $t' = t + c(x), x' = x$. On a alors

$$f(t,x) = e^{t+c(x)}.e^{-c(x)}.g(x) = e^{t'}.\tilde{g}(x') = \tilde{f}(t',x').$$

Le théorème donne alors l'isomorphisme (a,b)-linéaire annoncé. $\blacksquare$

REMARQUES.

1. Si on a $E_g = F_g$, c'est à dire si E_g est à pôle simple, ce qui équivaut à la condition $g \in J(g)$, la classe d'isomorphisme du (a,b)-module de Brieskorn de g est indépendante du choix de g, c'est à dire du choix de l'équation réduite de l'hypersurface $Y = g^{-1}(0)$.
2. Si on prend $c \in \mathbb{C}$ le (a,b)-module $E_{\tilde{g}}$ associé à la fonction $\tilde{g} := e^{-c}.g$ est simplement le (a,b)-module obtenu à partir de E_g en définissant de nouvelles opérations $\tilde{a} := e^{-c}.a$ et $\tilde{b} := e^{-c}.b$. On remarquera que ceci ne change pas $b^{-1}a$. L'isomorphisme donné par le corollaire se réduit dans ce cas à l'isomorphisme $F_g \to F_{\tilde{g}}$ donné par $exp(-c.b^{-1}a)$ (voir 7.1). $\square$

Comme il est possible qu'au voisinage d'une composante connexe S^*_p de S^*, on ait simultanément un champ de vecteur holomorphe W_0 vérifiant $W_0.f = 0$ et ne s'annulant pas le long de S^*_p, ainsi qu'un champ de vecteur holomorphe W_1, vérifiant $W_1.f = f$ et ne s'annulant pas le long de S^*_p, notre description du faisceau $\hat{\mathcal{H}}^n$ implique que l'on ait $E_g = F_g$ dans ce cas, c'est à dire que E_g est à pôle simple, ou encore que $g \in J(g)$, où $J(g)$ désigne l'idéal jacobien de g.
Le lemme suivant donne une preuve directe de ce fait.

Lemme 4.3.6 *On considère au voisinage de l'origine dans* $\mathbb{C}^{n+1}$ *la fonction* $f(t,x) = e^t.g(x)$ *où* $g : (\mathbb{C}^n, 0) \to (\mathbb{C}, 0)$ *est un germe à singularité isolée. Supposons qu'il existe un champ de vecteur holomorphe* W_0 *non nul à l'origine de* $\mathbb{C}^{n+1}$ *tel que* $W_0.f = 0$. *Alors on a* $g \in J(g)$.

Preuve. Ecrivons $W_0 = \alpha.\frac{\partial}{\partial t} + W'$, où le champ W' ne dérive plus en t. Si W' s'annule à l'origine, alors α est une fonction inversible au voisinage de l'origine, et on peut supposer que $\alpha \equiv 1$, quitte à diviser W_0 par α. On a alors $W'.g = -g$, et donc $g \in J(g)$.
Sinon, le champ de vecteur W' ne s'annule pas sur l'hyperplan $\{t = 0\}$ au voisinage de l'origine, et en faisant $\{t = 0\}$ dans l'identité $\alpha.e^t.g + e^t.W'.g \equiv 0$ on trouve dans $\mathbb{C}^n$ un champ de vecteur $V' = W'_{|\{t=0\}}$ qui ne s'annule pas près de l'origine et vérifie $V'.g \in (g)$. On contredit alors immédiatement l'hypothèse que g est à singularité isolée à l'origine de $\mathbb{C}^n$. $\blacksquare$.

4.3.2 Le faisceau $\hat{\mathcal{H}}^n$: preuve des théorèmes 4.3.4 et 4.3.1.

Considérons la situation (L) introduite au paragraphe 4.3.1. Le théorème suivant sera la clef de notre étude du faisceau $\hat{\mathcal{H}}^n$ sous l'hypothèse (HH).

Théorème 4.3.7 *Dans la situation* (L) *il existe un plus grand sous-*$\mathcal{O}_D[[b]]-$*module* $\mathbb{G}$ *de* $\mathbb{E}$ *qui est stable par* $b^{-1}.\nabla$. *Supposons que l'on ait* $\nabla(\mathbb{E}) \subset a.\mathbb{E} + b.\mathbb{E}$. *Alors* $\mathbb{G}$ *vérifie les propriétés suivantes :*

1) *Il contient* $\mathbb{F}$ *le plus grand sous-*$\mathcal{O}_D[[b]]-$*module de* $\mathbb{E}$ *stable par* $b^{-1}.a$ *(donc* $\mathbb{F}$ *est à pôle simple.)*

2) *Il existe un entier* $m \geq 0$ *tel que* $b^m.\mathbb{E} \subset \mathbb{G}$.

3) *Il est localement libre de rang fini sur* $\mathcal{O}_D[[b]]$.

4) *Il est stable par* a.

5) *Il contient* $Ker\,\nabla$ *et est contenu dans* $b^{-1}.\nabla(\mathbb{P})$.

Démonstration. L'existence de $\mathbb{G}$ est évidente. Le premier point sera conséquence du corollaire du lemme suivant.

Lemme 4.3.8 *Soit* $(\xi_j)_{j\in[0,N]}$ *une suite de* $(n-1)-$*formes t-relatives vérifiant*

$$f.d_/\xi_j = d_/f \wedge \xi_{j+1} \quad \forall j \in [0, N-1].$$

Supposons que $\frac{\partial f}{\partial t} = \gamma.f$.
Alors la suite $(\theta_j)_{j\in[0,N-1]}$ *définie par* $\theta_j = \frac{\partial \xi_j}{\partial t} - \gamma.\xi_{j+1}$ *vérifie*

$$\nabla([d_/\xi_j]) = b[d_/\theta_j] \quad \forall j \in [0, N-1] \qquad \text{et} \quad f.d_/\theta_j = d_/f \wedge \theta_{j+1} \quad \forall j \in [0, N-2].$$

Preuve. En dérivant en t notre relation de départ on obtient :

$$f.\gamma.d_/\xi_j + f.d_/(\frac{\partial \xi_j}{\partial t}) = d_/(f.\gamma) \wedge \xi_{j+1} + d_/f \wedge \frac{\partial \xi_{j+1}}{\partial t}$$

ce qui donne

$$\begin{aligned} & f.d_/(\frac{\partial \xi_j}{\partial t}) = f.d_/\gamma \wedge \xi_{j+1} + d_/f \wedge \frac{\partial \xi_{j+1}}{\partial t} \quad \text{et donc} \\ & f.d_/(\frac{\partial \xi_j}{\partial t} - \gamma.\xi_{j+1}) + f.\gamma.d_/\xi_{j+1} = d_/f \wedge \frac{\partial \xi_{j+1}}{\partial t} \\ & f.d_/(\frac{\partial \xi_j}{\partial t} - \gamma.\xi_{j+1}) = d_/f \wedge (\frac{\partial \xi_{j+1}}{\partial t} - \gamma.\xi_{j+2}) \quad \text{pour} \quad j \in [0, N-2] \end{aligned}$$

d'où la première relation annoncée.
La seconde se déduit immédiatement de la définition de ∇. ■

Corollaire 4.3.9 *Soit* $x_0 = [d_/\xi_0] \in \mathbb{E}$ *vérifiant* $a^p.x_0 \in b^p.\mathbb{E} \quad \forall p \in [0, N]$.
Alors on a $\nabla^p(x_0) \in b^p.\mathbb{E} \quad \forall p \in [0, N]$.

Preuve. L'hypothèse implique l'existence d'une suite $(\xi_j^0)_{j\in[0,N]}$ vérifiant l'hypothèse du lemme précédent, avec $\xi_0^0 = \xi_0$. Définissons ξ_j^k par récurrence sur k, pour $k \in [0,N]$ et $j \in [0,N-k]$ en posant :

$$\xi_j^{k+1} := \frac{\partial \xi_j^k}{\partial t} - \gamma.\xi_{j+1}^k \quad \text{avec} \quad j \in [0, N-k-1].$$

On aura alors, grâce au lemme précédent, les relations

$$f.d_{/}\xi_j^k = d_{/}f \wedge \xi_{j+1}^k \quad \forall k \in [0,N-1] \quad \forall j \in [0,N-k-1] \quad \text{et}$$
$$\nabla([d_{/}\xi_j^k]) = b[d_{/}\xi_j^{k+1}] \quad \forall k \in [0,N-1] \quad \forall j \in [0,N-k-1]$$

Ceci donne $(b^{-1}.\nabla)^p(d_{/}\xi_0^0) = [d_{/}\xi_0^p] \quad \forall p \in [0,N]$. ∎

Démonstration du théorème 4.3.4 (suite). Comme on a

$$\mathbb{F} = \{x \in \mathbb{E} \ / \ \forall k \quad a^k.x \in b^k.\mathbb{E}\} \quad \text{et}$$
$$\mathbb{G} = \{x \in \mathbb{E} \ / \ \forall k \quad \nabla^k.x \in b^k.\mathbb{E}\}$$

l'assertion 1) du théorème en découle.
Pour m suffisament grand on a $\sum_0^m (b^{-1}.a)^j.\mathbb{E} = \tilde{\mathbb{E}}$ qui est le saturé par $b^{-1}.a$ de $\mathbb{E}$. On aura alors $b^m.\tilde{\mathbb{E}} \subset \mathbb{E}$ et ce sous-$\mathcal{O}_D[[b]]-$module est stable par $b^{-1}.a$. Il est donc contenu dans $\mathbb{F}$. Ceci montre l' assertion 2).
Comme b est injective sur $\mathbb{G}$ qui est $b-$séparé, il suffit, d'après la proposition 7.2.2, de montrer que $\mathbb{G}/b.\mathbb{G}$ est $\mathcal{O}_D-$cohérent. Comme c'est le quotient de $\mathbb{G}/b^{m+1}.\tilde{\mathbb{E}}$ par $b.\mathbb{G}/b^{m+1}.\tilde{\mathbb{E}}$, il suffit de montrer que ces quotient sont $\mathcal{O}_D-$cohérents. Ceci résulte immédiatement du lemme suivant, puisque $\mathbb{G}, b.\mathbb{G}$ et $b^{m+1}.\tilde{\mathbb{E}}$ sont stables par $b^{-1}.\nabla$, et puisque $\mathbb{E}/b^{m+1}.\tilde{\mathbb{E}}$ et $b.\mathbb{E}/b^{m+1}.\tilde{\mathbb{E}}$ sont localement libres sur $\mathcal{O}_D$ (voir 4.2.1).

Lemme 4.3.10 *Soit D un disque ouvert de $\mathbb{C}$ et soit p un entier. Soit $\mathcal{F}$ un sous-faisceau de $\mathcal{O}_D-$modules du faisceau $\mathcal{O}_D^p$. On note par ∇ la connexion triviale sur $\mathcal{O}_D^p$ et on suppose que $\mathcal{F}$ est stable par ∇. Alors $\mathcal{F}$ est cohérent (donc localement libre, donc libre).*

Preuve. Montrons par récurrence sur $p \geq 0$ que $\mathcal{F}$ est localement libre sur un disque ouvert de centre 0. Montrons déja que si $\mathcal{F}$ n'est pas nul, il existe un disque ouvert de centre 0 et une section horizontale non nulle qui est une section de $\mathcal{F}$ au voisinage de 0. Comme $\mathcal{F}$ n'est pas nul et que c'est un sous-faisceau de $\mathcal{O}_D^p$, on peut trouver un disque Δ de centre 0 et une section $\sigma \in \Gamma(\Delta,\mathcal{F})\setminus\{0\}$.Choisissons alors σ et Δ de sorte qu'il existe une décomposition de σ dans une base horizontale $e_1,\cdots,e_p$ telle que $\sigma = \sum_{j=1}^k s_j.e_j$ avec k minimal. Si $k=1$ on peut appliquer ∇ un nombre fini de fois de sorte que $s_1(0) \neq 0$. Quitte à restreindre Δ on peut alors supposer s_1 inversible sur Δ et en on conclut que $(e_1)_{|\Delta}$ est une section de $\mathcal{F}$. On quotiente alors par $\mathcal{O}_D.e_1$ et on est ramené au même problème avec $p-1$

sur le disque Δ. D'où notre assertion.
Si on a $k \geq 2$ on considère la fonction holomorphe $s'_1.s_2 - s'_2.s_1$ sur Δ. Si elle est identiquement nulle, alors on a $s_1 = \lambda.s_2$ avec $\lambda \in \mathbb{C}^*$ et $\sigma = s_2.(e_2 + \lambda.e_1) + s_3.e_3 + \cdots + s_k.e_k$, ce qui contredit la minimalité de k. Si $s'_1.s_2 - s'_2.s_1$ n'est pas identiquement nulle sur Δ alors la section $s'_1.\sigma - s_1.\nabla(\sigma)$ de $\Gamma(\Delta, \mathcal{F})$ n'est pas nulle et ceci contredit à nouveau la minimalité de k. Donc $\mathcal{F}$ est localement libre au voisinage de l'origine. $\blacksquare$

Démonstration du théorème 4.3.4.(Fin). Montrons que $\mathbb{G}/b.\mathbb{G}$ n'a pas de $\mathcal{O}_D-$torsion. En effet on a $y \in \mathbb{G}$ ssi $\forall p \geq 0$ $\nabla^p(y) \in b^p.\mathbb{E}$. Si $x \in \mathbb{G}$ et $\varphi.x \in b.\mathbb{G}$ avec $\varphi \in \mathcal{O}_D$ et $\varphi \not\equiv 0$, on aura $x = b.y$ où $y \in \mathbb{E}$ puisque $\mathbb{E}/b.\mathbb{E}$ n'a pas de $\mathcal{O}_D-$torsion (grâce à (H 0), voir 3.2.2) et $\varphi.y \in \mathbb{G}$. Mais on a pour chaque $p \geq 0$ une identité de la forme

$$\nabla^p(\varphi.y) = \varphi.\nabla^p(y) + \sum_{j=1}^{p} \psi_{p,j}.b^j.\nabla^{p-j}(y)$$

où les $\psi_{p,j}$ sont dans $\mathcal{O}_D$. Si on a montré que pour $p \leq p_0$ on a $\nabla^p(y) \in b^p.\mathbb{E}$, l'identité ci-dessus pour $p_0 + 1$ montre que $\varphi.\nabla^{p_0+1}(y) \in b^{p_0+1}.\mathbb{E}$. On en conclut que $y \in \mathbb{G}$ puisque $\mathbb{E}/b.\mathbb{E}$ n'a pas de $\mathcal{O}_D-$torsion. Ceci achève la preuve de l'assertion 3).
Comme $b^{-1}.\nabla$ commute à a, on a

$$b^{-1}.\nabla(\mathbb{G} + a.\mathbb{G}) \subset \mathbb{G} + a.\mathbb{G}.$$

Mais $\mathbb{G} + a.\mathbb{G}$ est un sous-$\mathcal{O}_D[[b]]-$module de $\mathbb{E}$. Comme il est stable par $b^{-1}.\nabla$ il est contenu dans $\mathbb{G}$. Ceci prouve notre troisième assertion.
Comme $\mathcal{O}_D[[b]].Ker\,\nabla$ est un sous-$\mathcal{O}_D[[b]]-$module de $\mathbb{E}$ qui est stable par $b^{-1}.\nabla$, il est contenu dans $\mathbb{G}$. Donc à fortiori $Ker\,\nabla$.
Maintenant que l'on sait que $\mathbb{G}$ est localement libre de type fini sur $\mathcal{O}_D[[b]]$, le théorème de Cauchy donne l'égalité $\mathbb{G} = \mathcal{O}_D[[b]].Ker\,\nabla$. On en déduit que $b^{-1}.\nabla(\mathbb{G}) = \mathbb{G}$ ce qui achève la preuve de l'assertion 4), puisque le sous-module $\mathbb{P} := \{x \in \mathbb{E} \ / \ \nabla(x) \in b.\mathbb{E}\}$ contient $\mathbb{G}$.
Il nous reste seulement à montrer que si $\gamma \equiv 0$ on a $\mathbb{G} = \mathbb{E}$ et que si $\gamma \equiv 1$ on a $\mathbb{G} = \mathbb{F}$ où $\mathbb{F}$ est le plus grand sous-$\mathcal{O}_D[[b]]-$module de $\mathbb{E}$ stable par $b^{-1}.a$.
Ces deux assertions sont évidentes. $\blacksquare$

Corollaire 4.3.11 *Dans la situation* (L) *on a* $\nabla(\mathbb{E}) \subset a.\mathbb{E} + b.\mathbb{E}$. *Les conclusions du théorème précédents sont donc vraies.*

Remarque. Pour $\gamma \equiv 1$ on a $\nabla = b_\circ\frac{\partial}{\partial t} - a$ ce qui montre et $\frac{\partial}{\partial t}$ est bien définie sur $\mathbb{E}$. Donc $Ker\,\nabla$ est défini comme l'ensemble des $x \in \mathbb{F}$ qui vérifient $\frac{\partial}{\partial t}(x) = b^{-1}.a(x)$. La définition de $exp(t.b^{-1}.a) : \mathbb{F} \to \mathbb{F}$ qui est donnée dans l'appendice (voir 7.1) permet dans ce cas d'expliciter la trivialisation locale du faisceau localement constant $\hat{\mathcal{H}}^n$ de fibre F_g.
Bien sûr, le cas $\gamma \equiv 0$ est encore plus simple. $\square$

4.3.3 Le faisceau $\hat{\mathcal{H}}^{n+1}$; preuve du théorème 4.3.2.

Commençons par énoncer un corollaire des résultats obtenus plus haut.

Corollaire 4.3.12 *Dans la situation* (L)*, si l'entier* m *vérifie* $b^m.E_g \subset F_g$*, on a* $b^m.\hat{\mathcal{H}}^{n+1} = 0$.

PREUVE. Comme on a alors, grâce au théorème 4.3.7

$$b^m.\mathbb{E} \subset \mathbb{F} \subset \mathbb{G} \subset b^{-1}.\nabla(\mathbb{P})$$

la proposition 4.2.6 permet de conclure. ∎

Nous nous proposons de montrer maintenant que, sous l'hypothèse (HH) le faisceau $\hat{\mathcal{H}}^{n+1}$ possède sur S^* la propriété de "prolongement analytique" suivante :

(PA) Soit $\mathcal{F}$ un faisceau sur S^*. Nous dirons qu'il vérifie la propriété (PA) si
. pour tout ouvert connexe $U \subset S^*$ et tout ouvert non vide $V \subset U$, la
. restriction : $\Gamma(U, \mathcal{F}) \to \Gamma(V, \mathcal{F})$ est injective.

Lemme 4.3.13 *Dans la situation* (L) *l'image de l'inclusion évidente de* $\mathcal{O}_D-$*modules localement libres*

$$\mathbb{P}/\mathbb{G} \hookrightarrow \mathbb{E}/\mathbb{G}$$

est localement facteur direct.

PREUVE. Ceci est conséquence immédiate du fait que le quotient $\mathbb{E}/\mathbb{P}$ est un $\mathcal{O}_D-$module localement libre. Montrons ce point. Comme ce faisceau est $\mathcal{O}_D-$cohérent, il suffit de montrer qu'il est sans $\mathcal{O}_D-$torsion.
Soit donc $\varphi \in \mathcal{O}_D$ non identiquement nulle et soit $x \in \mathbb{E}$ tel que $\varphi.x \in \mathbb{P}$. On a donc $\nabla(\varphi.x) = \varphi'.b.x + \varphi.\nabla(x) \in b.\mathbb{E}$. Donc $\varphi.\nabla(x)$ est dans $b.\mathbb{E}$ et, puisque $\mathbb{E}/b.\mathbb{E} \simeq \hat{\Omega}^n_{/} / d_{/}f \wedge \hat{\Omega}^{n-1}_{/}$ est localement libre, on en conclut que $\nabla(x) \in b.\mathbb{E}$ c'est à dire que $x \in \mathbb{P}$. ∎

Lemme 4.3.14 *Soient* p *et* q *deux entiers. Notons respectivement par*

$$i : \mathcal{O}^p_D \hookrightarrow \mathcal{O}^p_D \oplus \mathcal{O}^q_D \quad \text{et} \quad \pi : \mathcal{O}^p_D \oplus \mathcal{O}^q_D \to \mathcal{O}^p_D$$

l'injection et la projection.
Soit $\nabla : \mathcal{O}^p_D \to \mathcal{O}^p_D \oplus \mathcal{O}^q_D$ *une i-connexion*[7]*. Supposons* ∇ *injective. Alors le faisceau* $\mathrm{Coker}\,\nabla$ *vérifie la propriété* (PA) *sur tout disque contenu dans* D.

[7]c'est à dire un morphisme de faisceaux de $\mathbb{C}-$espaces vectoriels vérifiant $\nabla(\varphi.x) = \varphi'.i(x) + \varphi.\nabla(x)$, $\forall \varphi \in \mathcal{O}_D$ et $\forall x \in \mathcal{O}^p_D$.

PREUVE. Comme $\pi \circ \nabla : \mathcal{O}_D^p \to \mathcal{O}_D^p$ est une connexion (au sens ordinaire) sur un disque, il existe une base horizontale $e := (e_1, \cdots, e_p)$ pour $\pi \circ \nabla$. Posons $\nabla(e) = M.\varepsilon$ où $M \in L(\mathbb{C}^p, \mathbb{C}^q) \otimes \Gamma(U, \mathcal{O}_D)$ et où $\varepsilon = (\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_q)$ une base de $\mathcal{O}_D^q$ sur U.
Pour $X = (x_1, \cdots, x_p) \in \mathcal{O}_D^p$ on aura : $\nabla(X.e) = X'.e \oplus X.M.\varepsilon$.
Soit $u.e \oplus v.\varepsilon$ une section de $\mathcal{O}_D^p \oplus \mathcal{O}_D^q$ sur le disque U telle qu'il existe $X \in \Gamma(V, \mathcal{O}_D^p)$ vérifiant $\nabla(X.e) = u.e \oplus v.\varepsilon$ sur le disque V. On aura donc, si $t_0 \in V$

$$v = X(t_0).M(t) + \Big(\int_{t_0}^{t} u\Big).M(t) \qquad \text{sur} \quad \mathrm{V}.$$

Par prolongement analytique, ceci restera vrai sur le disque U. ■

Corollaire 4.3.15 *Sous les hypothèses* (HH), *le faisceau* $\hat{\mathcal{H}}^{n+1}$ *vérifie la propriété* (PA) *sur* S^*.

PREUVE. Il suffit d'appliquer le lemme précédent à la $i-$connexion
$b^{-1}.\nabla : \mathbb{P}/\mathbb{G} \to \mathbb{E}/\mathbb{G}$ où l'on a noté par $i : \mathbb{P}/\mathbb{G} \hookrightarrow \mathbb{E}/\mathbb{G}$ l'inclusion localement facteur direct d'après le lemme 4.3.13.
En effet la propriété (PA) locale[8] implique la propriété (PA) globale :
Considérons un ouvert connexe U et une section $\sigma \in \Gamma(U, \hat{\mathcal{H}}^{n+1})$. Soit Λ l'ensemble des points de U au voisinage desquels la section σ est identiquement nulle. Il nous suffit de prouver que Λ est fermé dans U. Soit $t \in \partial\Lambda$. Tout voisinage ouvert assez petit de t rencontre Λ et la propriété (PA) étant supposée vraie localement, elle est vraie sur un voisinage assez petit de t. On en conclut que σ est identiquement nulle au voisinage de t c'est à dire que $t \in \Lambda$. ■

4.4 Étude de la monodromie sous l'hypothèse (H II).

Supposons que f vérifie (HH), fixons une composante connexe S_p^* de S^* et un champ de vecteur holomorphe global[9] W qui ne s'annule pas sur S_p^* et vérifie $W.f = \gamma.f$ où γ est une fonction holomorphe globale.

Lemme 4.4.1 *Plaçons-nous dans la situation* (L) *et supposons donnés deux systèmes de coordonnées* $(t, x_1, \cdots, x_n)$ *et* $(t', y_1, \cdots, y_n)$ *au voisinage de l'origine dans* $D \times \mathbb{C}^n$ *tels que l'on ait l'égalité* $D \times \{0\} = \{x = 0\} = \{y = 0\}$ *ainsi que l'égalité des champs de vecteurs* $\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t'}$.
Alors il existe une fonction holomorphe ρ *au voisinage de l'origine dans* $\mathbb{C}^n$ *et un germe* Θ *d'automorphisme de* $\mathbb{C}^n$ *tels que l'on ait*

$$t' = t + \rho(x) \quad \text{et} \quad y = \Theta(x)$$

[8] c'est à dire sur des ouverts assez petits. C'est ce que nous donne l'étude locale précédente du faisceau $\hat{\mathcal{H}}^{n+1}$.

[9] c'est à dire sur $D \times X$. L'aspect global sur un voisinage ouvert de S_p^* suffirait pour l'étude qui va suivre.

au voisinage de l'origine dans $D \times \mathbb{C}^n$.

Preuve. Il suffit d'appliquer le champ de vecteur $\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t'}$ aux égalités $t' = \varphi(t,x)$ et $y = \Theta(t,x)$ pour obtenir que Θ et $\varphi(t,x) - t$ sont indépendants de t. ■

Remarque. Si l'on suppose que $W.f = \gamma.f$ la fonction γ est bien sûr indépendante du choix des coordonnées, pourvu que l'on ne change pas le champ de vecteur $W = \frac{\partial}{\partial t}$. Par contre, les fonctions g et c se transforment de la façon suivante, d'après le lemme précédent :

$$\tilde{f}(t',y) = e^{\tilde{c}(t+\rho(x),\Theta(x))}.\tilde{g}(\Theta(x)) \quad \text{ce qui donne}$$
$$\tilde{f}(t',y) = f(t,x) = e^{c(t,x)}.g(x)$$

et donc, puisque la fonction $\sigma(t,x) := c(t,x) - \tilde{c}(t+\rho(x),\Theta(x))$ ne dépend pas de t, on obtient l'existence d'une fonction holomorphe σ à l'origine de $\mathbb{C}^n$ de sorte que l'on ait $\tilde{g}(\Theta(x)) \equiv e^{\sigma(x)}.g(x)$. □

Plaçons-nous maintenant sous l'hypothèse (H II).

Définition 4.4.2 *Fixons un point base* $p \in S_p^*$. *Choisissons un hyperplan* H_p *transverse à* S_p^* *en* p, *et une identification de* (H_p, p) *à* $(\mathbb{C}^n, 0)$.
Nous appellerons **germe transverse** *à* S_p^* *le germe d'hypersurface* $\{g_p = 0\}$ *à singularité isolée à l'origine de* $\mathbb{C}^n$ *obtenue via la restriction de* f *à* H_p.

Remarques.

1. Si au voisinage de $p \in S_0^*$ on a $f(t,x) = g(x)$, le germe transverse correspond à l'hyperplan $\{t = t_0\}$ est donné par la fonction g. Si on choisit un hyperplan transverse de la forme $\{t = t_0 + \rho(x)\}$ cela ne changera pas g et l'équation du germe transverse est bien défini à un changement de coordonnées près sur $\mathbb{C}^n$ préservant le champ de vecteur donné et la condition $S_p^* = \{x = 0\}$.

2. Par contre, dans le cas où près de $p \in S_p^*$ on a $f(t,x) = e^t.g(x)$ un changement d'hyperplan transverse comme ci-dessus change la fonction $e^{t_0}.g(x)$ en $e^{t_0+\rho(x)}.g(x)$, on a donc multiplication par l'inversible $e^{\rho(x)}$ du germe transverse. Seule l'hypersurface $\{g = 0\}$ est alors intrinsèque dans ce cas. □

Considérons des systèmes de coordonnées locales $(t^j, x^j), j \in [1, N]$ vérifiant les conditions i) et ii) du lemme ci-dessus, dont les ouverts de définition recouvrent le cercle de centre 0 passant par p dans le normalisé D_p de la composante irréductible S_p.
Ordonnons ces ouverts de façon à tourner une fois dans le sens direct autour de ce cercle. De plus, nous supposerons ces systèmes de coordonnées centrés en des

points $p = p_1, p_2, \cdots, p_N = p$ sur le cercle considéré. L'automorphisme Θ obtenu en composant les automorphismes Θ_j (donnés par le lemme) qui vérifient $\Theta_j(x^j) = x^{j+1}$ pour $j \in [1, N]$ avec la convention $x^{N+1} = x^1$, explicitement $\Theta := \Theta_N \circ \Theta_{N-1} \cdots \circ \Theta_1$, est indépendant des choix effectués, le système de coordonnées $(t^1, x^1) = (t^{N+1}, x^{N+1})$ étant fixé. En effet, si on remplace $x^j, j \in [2, N]$ par $\tilde{x}^j = \Phi(x^j)$ le composé ne change pas, puisque l'on remplace Θ_{j-1} par $\Phi \circ \Theta_{j-1}$ et Θ_j par $\Theta_j \circ \Phi^{-1}$.
Il est facile de voir que pour $p \in S_p^*$ et H_p fixés, un changement de choix des points et des cartes correspondantes se ramène, quitte à passer à un recouvrement plus fin, à des changements de coordonnées. Donc l'automorphisme Θ est bien défini, à conjuguaison près, par un changement de coordonnées.

Définition 4.4.3 *Nous appellerons* **automorphisme caractéristique** *du couple* (S_p^*, W_i) *l'automorphisme* Θ *de* $(\mathbb{C}^n, 0)$ *ainsi obtenu.*
Nous appellerons **facteur d'automorphie** *du couple* (S_p, W) *le germe à l'origine de* $\mathbb{C}^n$ *de fonction holomorphe* e^{σ_p} *(déduite également du lemme) qui vérifie l'identité*

$$e^{\sigma_p}.g_p \circ \Theta_p = g_p.$$

On verra plus loin des exemples montrant que l'automorphisme caractéristique et le facteur d'automorphie peuvent effectivement dépendre du choix du champ de vecteur.

Le théorème suivant récapitule la description obtenue de la monodromie du système local $\mathcal{H}^n$ sous l'hypothèse (H II), à l'aide des notions définies ci-dessus.

Théorème 4.4.4 *Considérons, sous l'hypothèse* (H II) *une composante connexe* S_p^* *de* S^**. Alors la restriction à* S_p^* *du faisceau* $\hat{\mathcal{H}}^n$ *est un système local de (a,b)-modules décrit de la façon suivante :*

1. *Si l'hypothèse* (HH+a) *est vérifiée sur* S_p^**, la fibre de ce système local est isomorphe au réseau de Brieskorn* E_{g_p} *de l'équation du germe transverse* g_p *à* S_p^**, et la monodromie est donnée par l'automorphisme (a,b)-linéaire de* E_{g_p} *défini par l'image par* Θ_p*, l'automorphisme caractéristique du couple* (S_p^*, W_0)*; il vérifie* $g_p \circ \Theta_p = g_p$*.*

2. *Si l'hypothèse* (HH+b) *est vérifiée sur* S_p^**,alors la fibre de ce système local est isomorphe à* F_{g_p} *le plus grand sous-(a,b)-module à pôle simple du réseau de Brieskorn* E_{g_p} *de l'équation du germe transverse* g_p *à* S_p^**; la monodromie est donnée par la composée*

$$F_{g_p} \xrightarrow{(\Theta_p)_*} F_{g_p \circ \Theta_p} \rightarrow F_{g_p}$$

où la première flèche est l'isomorphisme (a,b)-linéaire défini par l'image par (Θ_p)*, où* Θ_p *désigne l'isomorphisme caractéristique du couple* (S_p^*, W_1) *et où la seconde est l'isomorphisme (a,b)-linéaire du théorème 4.3.4 associé au facteur d'automorphie du couple* (S_p^*, W_1)*.*

4.4.1 Le cas quasi-homogène.

Considérons un polynôme quasi-homogène f dans $\mathbb{C}^{n+1}$ correspondant aux poids $k_0, \cdots, k_n$, que l'on supposera dans $\mathbb{Z}$. Nous supposons donc que
$\forall \lambda \in \mathbb{C}^* \quad f(\lambda^{k_0}.x_0, \cdots, \lambda^{k_n}.x_n) \equiv \lambda^\delta.f(x_0, \cdots, x_n)$. Nous supposerons que le p.g.c.d. des poids non nuls est égal à 1, ce qui n'est pas restrictif.
Nous supposerons le lieu singulier S de f de dimension 1. Alors notre hypothèse (H II) est vérifiée dès que pour chaque composante irréductible S_p de S il existe une des variables de poids non nul qui n'est pas identiquement nulle sur S_p. C'est en particulier toujours le cas si tous les poids sont non nuls.
On notera $E := \sum_{j=0}^n k_j x_j \frac{\partial}{\partial x_j}$ le champ d'Euler correspondant qui vérifie donc $E.f = \delta.f$.
Si $\delta = 0$ on est dans le cas (H I). Dans ce cas la fibre du système local est E_g et l'automorphisme de monodromie est induit par l'image des formes holomorphes par (Θ), compte tenu de la relation $g = g \circ \Theta$.
La description de l'automorphisme Θ dans ce cas est analogue à celle donnée ci-dessous dans le cas $\delta \neq 0$.

Traitons maintenant le cas $\delta \neq 0$. On peut alors choisir le champ de vecteur $W_1 := (1/\delta).E$.
Supposons, ce qui n'est pas restrictif, quitte à permuter les coordonnées considérées, qu'une composante irréductible du lieu singulier S de f passe par le point $p := (p_0 = 1, p_1, \cdots, p_n)$, et que k_0 est non nul. La composante connexe S_p^* de S^* correspondante est alors l'image de $\mathbb{C}$ par l'application

$$t \to (p_0.exp(k_0.t/\delta), \cdots, p_n.exp(k_n.t/\delta)).$$

Considérons alors l'application $F : \mathbb{C}^{n+1} \to \mathbb{C}^{n+1}$ définie par

$$F(t, y_1, \cdots, y_n) := \big(exp(k_0.t/\delta), (p_1 + y_1).exp(k_1.t/\delta), \cdots, (p_n + y_n).exp(k_n.t/\delta)\big).$$

On vérifie immédiatement que c'est un difféomorphisme local holomorphe, grâce aux formules

$$t = \frac{\delta}{k_0}.\ln x_0, \text{et} \quad y_j = -p_j + x_j.(x_0)^{-k_j/k_0}, \quad \forall j \in [1, n],$$

et que

$$F^* f(t, y) = exp(t).f(1, p_1 + y_1, \cdots, p_n + y_n) = e^t.g_p(y)$$

où la fonction holomorphe $g_p : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$, admet une singularité isolée à l'origine. Ceci signifie que, quitte à passer sur le revêtement universel de la composante connexe de S_p^* associée au point p, l'on a obtenu une trivialisation globale du type considéré localement près des points correspondants à la situation locale (LI).

Montrons qu'alors nous pouvons lire la monodromie du système local $\hat{\mathcal{H}}^n$ en composant l'image par (Θ) avec l'action de $t \to t + 2i\pi.(\delta/\theta_p)$ sur $F_{g_p \circ \Theta_p}$, où $\theta_p :=$ p.g.c.d.$\{k_j \ / \ k_j.p_j \neq 0, j \in [0, n]\}$.

En effet cherchons la plus petite constante positive γ telle que $t \to t + 2i\pi.\gamma$ nous ramène au point $(p_0, p_1, \cdots, p_n)$. On devra donc avoir $\gamma.k_j/\delta \in \mathbb{Z}$ pour tout $j \in [0, n]$ tel que $p_j \neq 0$. On en déduit que l'on a $\gamma = \delta/\theta_p$, d'où notre assertion.
On remarque alors que l'automorphisme caractéristique Θ_p laisse invariant les coordonnées y_j pour lesquelles on a $p_j \neq 0$ et agit comme l'homothétie de rapport $exp(2i\pi.(k_j/\delta))$ sur la coordonnée y_j quand on a $p_j = 0$.
Le facteur d'automorphie est égal à $exp(2i\pi.(\delta/\theta_p))$. Il est donc constant dans ce cas.
Mais on a choisi d'identifier l'élément $z_0 \in F_g$ à la section $exp\big(t.(b^{-1}a)\big)[z_0]$ de $\mathbb{E} \simeq \hat{\Omega}^n_/ /dg \wedge d\hat{\Omega}^{n-2}_/$. En effet, dans le cas où une composante connexe S^*_p satisfait l'hypothèse (HH+b), la connexion $b^{-1}.\nabla$ est donnée par $\frac{\partial}{\partial t} - b^{-1}.a$. Donc l'exponentielle de $t.b^{-1}.a$ qui est définie dans l'appendice (voir 7.1) suffit pour déterminée les trivialisations locales du faisceau $\hat{\mathcal{H}}^n$ sur S^*_p. On en déduit que la monodromie de $\hat{\mathcal{H}}^n$ est donnée par la composée de l'image par (Θ_p) avec l'action de $exp\big((2i\pi.\delta/\theta_p).b^{-1}a\big)$ qui est un (a,b) isomorphisme de $F_{g_p \circ \Theta_p}$ sur F_{g_p}.
En particulier si l'on a $p_j \neq 0, \forall j \in [0, n]$, on a $\Theta_p \equiv Id$ et la monodromie se réduit à l'action de $exp\big((2i\pi.\delta/\theta_p).b^{-1}a\big)$.

4.4.2 Un cas spécial intéressant.

Considérons dans $\mathbb{C}^n$ deux polynômes homogènes[10] P et Q de degrés $p \neq q$, et considérons dans $\mathbb{C}^{n+1}$ la fonction

$$f(x, z) := P(z) + x.Q(z).$$

Nous supposerons que les polynômes P et Q vérifient la condition suivante

$$\{z \in \mathbb{C}^n \ / \ dP_z \wedge dQ_z = 0\} \cap \{P + Q = 0\} = \{0\}.$$

Alors on a l'égalité $\{(x, z) \in \mathbb{C}^{n+1} \ / \ df_{(x,z)} = 0\} = \{z = 0\} = S$ et le champ de vecteur

$$\tilde{E} := (p - q)x.\frac{\partial}{\partial x} + E$$

où E désigne le champ d'Euler sur $\mathbb{C}^n$, vérifie $\tilde{E}.f = p.f$ et il est non nul sur S^*.
On prend alors $W_1 := (1/p).\tilde{E}$. On peut choisir, localement sur S^*, les coordonnées suivantes :

$$t := \frac{p}{p - q}.\ln x, \quad y_j = z_j.e^{-t/p} \quad \forall j \in [1, n].$$

On a alors $f(x, z) = e^t.(P(y) + Q(y))$, et donc $g = P + Q$ est bien à singularité isolée grâce à notre hypothèse. Comme on est dans le cas $p_0 = 1, p_j = 0 \ \forall j \in [1, n]$ on a $\theta = k_0 = p - q$ et $\delta = p$. Donc la monodromie est donnée par $\Theta = e^{-2i\pi/(p-q)}$ et $t \to t + 2i\pi.p/(p-q)$. On vérifie sans peine la relation $e^{-2i\pi.p/(p-q)}.g(\Theta(y)) = g(y)$ grace aux homogénéité de P et Q, puisque $e^{-2i\pi.p/(p-q)} = e^{-2i\pi.q/(p-q)}$.

[10] Le cas quasi-homogène, analogue, est laissé en exercie au lecteur.

4.4.3 Un exemple explicite: $f(x,y,z) = xy^2 - z^6$.

Détaillons un exemple très simple mais significatif. Il montrera, entre autre, que la notion d'automorphisme caractéristique dépend du champ de vecteur W_0 ou W_1 que l'on a fixé sur la composante connexe S_p^* considérée. Et que plusieurs choix sont effectivement possibles, conduisant à des automorphismes caractéristiques différents. Cependant la monodromie du système local $\hat{\mathcal{H}}^n$ sur cette composante est, elle, intrinsèque !

Posons $W_0 = 2x.\frac{\partial}{\partial x} - y.\frac{\partial}{\partial y}$ et $W_1 := x\frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{6}z.\frac{\partial}{\partial z}$. Comme on a $W_0.f = 0$ et $W_1.f = f$ pour chaque $\xi \in \mathbb{C}$ on aura $W_1^\xi := W_1 + \xi.W_0$ qui vérifiera $W_1^\xi.f = f$. Ceci permet donc de calculer la monodromie de beaucoup de façons différentes.

D'abord on peut utiliser W_0 et on peut alors prendre comme coordonnées locales sur S^* les fonctions

$$t := \frac{1}{2}\ln x, \quad y_1 := y.\sqrt{x}, \quad y_2 := z.$$

On a alors $g(y_1, y_2) = y_1^2 - y_2^6$ et $\Theta(y_1, y_2) = (-y_1, y_2)$. Et donc $g \circ \Theta = g$.
Le (a,b)-module E_g est facile à décrire : c'est la somme directe des (a,b)-modules de rang 1 $E_{2/3} \oplus E_{5/6} \oplus E_1 \oplus E_{7/6} \oplus E_{4/3}$ engendrés respectivement par les classes des 2−formes holomorphes $dy, y_2dy, y_2^2dy, y_2^3dy, y_2^4dy$ où $dy := dy_1 \wedge dy_2$. L'action de Θ sur E_g est égale à $-Id$.

Pour $\xi \in \mathbb{C} \setminus \{0, -\frac{1}{2}\}$, posons $x = e^{(1+2\xi).t}, y = e^{-\xi.t}.y_1, z = e^{\frac{t}{6}}.y_2$. On obtient $f(x,y,z) = e^t.(y_1^2 - y_2^6)$. Alors $t \to t + 2i\pi/(1+2\xi)$ induit la mononodromie. On a donc

$$\Theta^\xi(y_1, y_2) = (y_1.exp(\frac{2i\pi.\xi}{1+2\xi}), y_2.exp(\frac{-i\pi}{3(1+2\xi)})).$$

Le facteur d'automorphie est alors égal à $exp(-\frac{2i\pi}{1+2\xi})$.
Donc Θ^ξ agit sur $[y_2^\alpha dy]$ par la multiplication par le nombre complexe

$$exp(\frac{2i\pi.\xi}{1+2\xi} - \frac{i\pi.(\alpha+1)}{3(1+2\xi)}) = -exp\big(-\frac{i\pi.(\alpha+4)}{3(1+2\xi)}\big).$$

Comme on a $b^{-1}a[y_2^\alpha dy] = \frac{\alpha+4}{6}.[y_2^\alpha dy]$ l'action de $exp\big(\frac{2i\pi}{1+2\xi}.b^{-1}a\big)$ sera donnée par la multiplication par le nombre complexe

$$exp(\frac{2i\pi}{1+2\xi}.\frac{\alpha+4}{6}) = exp(\frac{i\pi.(\alpha+4)}{3(1+2\xi)}).$$

On retrouve ainsi que la monodromie vaut $-Id$.

5 Finitude et Régularité

5.1 Quelques définitions.

Nous allons exploiter le théorème 2.1.1 et montrer que certains des $\widehat{\mathcal{A}}-$modules que l'on obtient à partir du complexe $\big((\hat{K}er\, df)^\bullet, d^\bullet)\big)$ sous l' hypothèse (HH)) ont des propriétés de finitude intéréssantes. En fait, notre résultat revient à dire que, modulo la $b-$torsion qui sera de dimension finie, ce seront des (a,b)-modules réguliers géomètriques.

Commençons par rappeler que E est un (a,b)-module si et seulement si E est un $\widehat{\mathcal{A}}-$module qui est un module libre et de type fini sur la sous-algèbre commutative $\mathbb{C}[[b]] \subset \widehat{\mathcal{A}}$.
Nous aurons besoin de permettre de la $b-$torsion (mais peu !).
Pour E un $\widehat{\mathcal{A}}-$module, notons par $\tilde{A}(E)$ et $B(E)$ respectivement, sa $a-$torsion et sa $b-$torsion. Posons[11] alors on aura $\hat{A}(E) := A(E)$.

Définition 5.1.1 *Un* $\widehat{\mathcal{A}}-$*module* E *sera dit* **petit** *s'il vérifie les conditions suivantes :*

i) Il est de type fini sur $\mathbb{C}[[b]]$.

ii) On a $B(E) \subset \hat{A}(E)$.

iii) Il existe $N \in \mathbb{N}$ *vérifiant* $a^N \hat{A}(E) = 0$.

Remarques.

1. Cette définition est stable par passage à un sous-$\widehat{\mathcal{A}}-$module. En effet, pour un sous-$\widehat{\mathcal{A}}-$module $F \subset E$ avec E petit, la noethérianité de $\mathbb{C}[[b]]$ donne i) et les relations $\hat{A}(F) = \hat{A}(E) \cap F, B(F) = B(E) \cap F$ donnent ii) et iii) pour F.

2. Pour E un $\widehat{\mathcal{A}}-$module, $\hat{A}(E)$ est sous-$\widehat{\mathcal{A}}-$module. De même, $B(E)$ est un sous-$\widehat{\mathcal{A}}-$module, puisque $b^k x = 0$ implique $b^k.ax = 0$ grâce à la relation
$$b^k.a = (a - k.b).b^k.$$

3. On a toujours $\hat{A}(E) = B(E)$ pour E petit, puisque la relation $a^N.\hat{A}(E) = 0$ implique $b^{2N}.A(E) = 0$ grâce à $ab - ba = b^2$, (voir [B.04 a)]). De plus cet espace vectoriel complexe est de dimension finie.

[11] Le lecteur attentif remarquera que $\hat{A}(E)$ est différent de $A(E)$ défini plus haut 2.2.1. En présence d'une action de $\mathbb{C}[[b]]$, de la continuité de a pour la topologie $b-$adique et de la condition iii) de la définition qui suit, il sera équivalent de demander à un x de E que $\mathbb{C}[b].x$ ou $\mathbb{C}[[b]].x$ soit contenu dans $\tilde{A}(E)$.

4. Si E est petit, alors le quotient $E/B(E)$ est un (a,b)-module. Réciproquement, si a agit de façon nilpotente sur $B(E)$ supposé de dimension finie sur $\mathbb{C}$ et si $E/B(E)$ est un (a,b)-module, alors E est petit[12].

Définition 5.1.2 *On appellera* $E/B(E)$ *le* **(a,b)-module associé** *au* $\widehat{\mathcal{A}}-$*module petit* E*.*

On a le critère élémentaire suivant pour vérifier qu'un $\widehat{\mathcal{A}}-$module E est petit.

Lemme 5.1.3 *Un* $\widehat{\mathcal{A}}-$*module* E *est petit si et seulement*

i) Il existe un entier N *tel que* $a^N.\hat{A}(E) = 0$*.*

ii) On a $B(E) \subset \hat{A}(E)$*.*

iii) Les espaces vectoriels complexes $Ker\, b$ *et* $CoKer\, b$ *sont de dimensions finies.*

Définition 5.1.4 *Un* $\widehat{\mathcal{A}}-$*module* E *sera dit* **régulier** *s'il est petit et s'il possède un sous-*$\widehat{\mathcal{A}}-$*module* F *vérifiant*

i) $a.F \subset b.F + A(F)$*.*

ii) Le quotient E/F *est un* $\mathbb{C}-$*espace vectoriel de dimension finie.*

On dira que E *est* **régulier géométrique** *si le (a,b)-module associé l'est.*

Rappelons qu'un (a,b)-module régulier E est dit géométrique si les valeurs propres de l'action de $b^{-1}.a$ sur $\tilde{E}/b.\tilde{E}$ a ses valeurs propres dans $\mathbb{Q}^{*+}$, où $\tilde{E}$ désigne le saturé de E par $b^{-1}.a$.
Un $\widehat{\mathcal{A}}-$module petit E est régulier si et seulement si le (a,b)-module associé est un (a,b)-module régulier. En effet l'image de F dans le (a,b)-module associé fournit un sous-(a,b)-module à pôle simple de codimension finie.
Réciproquement, l'image réciproque par l'application quotient $E \to E/B(E)$ du plus grand sous-(a,b)-module à pôle simple de $E/B(E)$ (voir l'appendice 7.1.4), fournit un sous-$\widehat{\mathcal{A}}-$module F vérifiant i).

Le lemme suivant est également élémentaire et sa démonstration est laissée au lecteur.

Lemme 5.1.5 *Soit* $0 \to E' \to E \to E''$ *une suite exacte de* $\widehat{\mathcal{A}}-$*modules.*

i) E *est petit dès que* E' *et* E'' *le sont.*

ii) E *est régulier dès que* E' *et* E'' *le sont.*

iii) E *est régulier géométrique dès que* E' *et* E'' *le sont.*

Si la flèche $E \to E''$ *est surjective, les implications ci-dessus sont des équivalences.*

[12] Ceci résulte du fait que pour un (a,b)-module F on a toujours $A(F) = \hat{A}(F) = 0$.

5.2 Le Théorème de finitude.

Plaçons-nous maintenant dans la situation du paragraphe précédent et notons comme plus haut par $\hat{\mathcal{H}}^i$ le i-ème faisceau de cohomologie du complexe $\big((\hat{\mathcal{K}}er\, df)^\bullet, d^\bullet\big)$.

Théorème 5.2.1 *Sous les hypothèses* (HH) *les* $\widehat{\mathcal{A}}-$*modules suivants sont réguliers géométriques :*

1. $H^i_{\{0\}}(Y, \hat{\mathcal{H}}^j)$ *pour* $i \geq 0$ *et* $j = 1, n.$
2. $E := H^0_{\{0\}}(Y, \hat{\mathcal{H}}^{n+1}).$
3. $E_\Phi := \mathbb{H}^{n+1}_\Phi(Y, (\hat{K}er\, df)^\bullet, d^\bullet))$ *et* $E'_\Phi := \mathbb{H}^{n+1}_\Phi(Y, (\tilde{K}er\, df)^\bullet, d^\bullet))$ *pour* $\Phi = c$ *et* $\Phi = c \cap S.$

Démonstration. On sait déja que l'on a une structure naturelle de $\widehat{\mathcal{A}}-$module sur chacun de ces groupes d'après le théorème 2.1.1, et que les morphismes "naturels" entre ces groupes sont $\widehat{\mathcal{A}}-$linéaires.
Comme on sait que[13], pour $n \geq 2$ on a $\hat{\mathcal{H}}^1 \simeq E_1 \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}_Y$, les groupes $H^i_{\{0\}}(Y, \hat{\mathcal{H}}^1)$ sont réguliers et géométriques (et sans torsion), pour tout $i \geq 0$.
On sait également que le faisceau $\hat{\mathcal{H}}^n$ est de support S et que sa restriction à S^* est un faisceau localement constant de (a,b)-modules. De plus on a $H^0_{\{0\}}(S, \hat{\mathcal{H}}^n) = 0$ car le faisceau $\hat{\mathcal{H}}^n$ n'admet pas de section non nulle à support l'origine. En effet la perversité du complexe des cycles évanescents assure qu'une section à support l'origine du localisé de $\hat{\mathcal{H}^n}$ en a est nulle. Mais on a montré l'injectivité de b sur $\hat{\mathcal{H}^n}$ dans la proposition 2.2.1, ce qui montre qu'il s'injecte dans son localisé en a car la $a-$torsion et la $b-$torsion coïncident. L'assertion 1) est donc démontrée.

Le cas de $E = H^0_{\{0\}}(Y, \hat{\mathcal{H}}^{n+1})$ est moins évident. Utilisons le lemme 5.1.3. Les propriétés $B(E) \subset A(E)$ et $\exists N/a^N.A(E) = \{0\}$ sont des conséquences immédiates de propriétés générales de la connexion de Gauss-Manin d'une fonction holomorphe quelconque f rappelées dans la proposition 2.2.1.
Il nous reste donc à montrer la finitude sur $\mathbb{C}$ de $Ker\, b$ et $CoKer\, b$.
La preuve de la finitude de $Ker\, b$ qui va suivre reprend essentiellement celle donné dans [B.04 a)]. Nous la redonnons ici pour la commodité du lecteur. Nous allons nous appuyer sur le lemme suivant :

Lemme 5.2.2 *On a un isomorphisme*

$$\tilde{b} : E \to H^0_{\{0\}}(Y, \frac{df \wedge \hat{\Omega}^n}{df \wedge d\hat{\Omega}^{n-1}})$$

[13]rappelons que E_1 désigne ici le (a,b)-module de rang 1 sur $\mathbb{C}[[b]]$ dont le générateur e vérifie $a.e = b.e$.

donné par $[d\xi] \to [df \wedge \xi]$. *Composé avec les applications déduites des flèches "évidentes":*

$$\frac{df \wedge \hat{\Omega}^n}{df \wedge d\hat{\Omega}^{n-1}} \hookrightarrow \frac{\hat{\Omega}^{n+1}}{df \wedge d\hat{\Omega}^{n-1}} \quad \text{et} \quad \tilde{j} : \frac{\hat{\Omega}^{n+1}}{df \wedge d\hat{\Omega}^{n-1}} \to \frac{\hat{\Omega}^{n+1}}{d(\hat{Ker}\, df)^n}$$

via le foncteur $H^0_{\{0\}}$, *il donne l'action de* b *sur* E.

Preuve. Une classe $[\omega] \in E$ est représentée par un germe à l'origine $\omega \in \hat{\Omega}^{n+1}$ tel qu'au voisinage de chaque point x non nul on puisse écrire $\omega = d\eta$ avec η dans $\big((\hat{Ker}\, df)^n\big)_x$. D'après de Rham, on peut écrire $\omega = d\xi$ où $\xi \in \big(\hat{\Omega}^n\big)_0$. En utilisant alors de Rham en degré n on obtient près de $x \neq 0, \xi = \eta + d\theta$ avec $\theta \in \big(\hat{\Omega}^{n-1}\big)_x$. Alors on constate que $df \wedge \xi$ s'écrit localement près de $x, df \wedge \xi = df \wedge d\theta$. Donc $[df \wedge \xi]$ est bien une section à support l'origine du faisceau $\frac{df \wedge \hat{\Omega}^n}{df \wedge d\hat{\Omega}^{n-1}}$. On vérifie immédiatement que l'application $\tilde{b}$ est bien définie.
Elle est surjective, car si $df \wedge \xi$ s'écrit localement en dehors de l'origine $df \wedge \xi = df \wedge d\theta$, alors $\omega := d\xi$ s'écrira localement en dehors de l'origine $\omega = d(\xi - d\theta)$ avec $\xi - d\theta \in (\hat{Ker}\, df)^n$. Donc $[\omega]$ sera bien une section à support l'origine du faisceau $\hat{\mathcal{H}}^{n+1} = \hat{\Omega}^{n+1}\big/d(\hat{Ker}\, df)^n$.
Montrons l'injectivité de $\tilde{b}$. Avec les notations précédentes, si on a $df \wedge \xi = df \wedge d\zeta$ avec $\zeta \in \big((\hat{\Omega})^{n-1}\big)_0$, on aura alors $\xi - d\zeta \in \big((\hat{Ker}\, df)^n\big)_0$ et $\omega = d(\xi - d\zeta)$. D'où l'injectivité.
Le fait que l'action de b sur E soit obtenue par la composée de l'énoncé se déduit immédiatement du fait que sur le faisceau $\hat{\mathcal{H}}^p, \forall p \geq 0$ l'action de b est donnée par $df \wedge d^{-1}$. ■

Démonstration du théorème (suite). Pour prouver la finitude de $Ker\, b$ dans E il nous suffit donc de montrer la finitude de $Ker\, j$ où $j := H^0_{\{0\}}(\tilde{j})$.
Pour cela considérons la suite exacte de faisceaux (sur S)

$$0 \to \frac{(\hat{Ker}\, df)^n \cap Ker\, d}{(\hat{Im}\, df)^n \cap Ker\, d} \to \frac{(\hat{Ker}\, df)^n}{(\hat{Im}\, df)^n} \to \frac{d(\hat{Ker}\, df)^n}{df \wedge d\hat{\Omega}^{n-1}} \to 0.$$

La finitude de $Ker\, j$, et donc de $Ker\, b$, se déduit de la suite exacte de cohomologie à support l'origine de la suite exacte ci-dessus, grâce aux faits suivants :

1. Le faisceau $\frac{(\hat{Ker}\, df)^n \cap Ker\, d}{(\hat{Im}\, df)^n \cap Ker\, d} \simeq \hat{\mathcal{H}}^n\big/b.\hat{\mathcal{H}}^n$ est un système local sur S^* d'espaces vectoriels complexes de dimension finies. Donc son $H^1_{\{0\}}$ est un espace vectoriel de dimension finie.

2. Le faisceau $\frac{(\hat{Ker}\, df)^n}{(\hat{Im}\, df)^n}$ n'a pas de section non nulle à support l'origine. En effet, il suffit de montrer cette propriété pour le faisceau $\frac{(Ker\, df)^n}{(Im\, df)^n}$, et ceci résulte du lemme 4.1.2 qui nous donne la nullité de $H^1_{\{0\}}(Y, (Im\, df)^n)$, puisque le faisceau $(Ker\, df)^n$ n'a pas de section à support l'origine.

La finitude de $CoKer\, b$ est maintenant conséquence des résultats déja obtenus grâce à un résultat général. En effet la finitude de $Ker\, b$, la relation $B(E) \subset \hat{A}(E)$ et l'existence d'un entier N tel que $a^N.A(E)$ donnent la finitude de la dimension de $B(E) = \hat{A}(E) = \tilde{A}(E)$ comme espace vectoriel complexe. On est donc ramené à montrer la finitude de $CoKer\, b$ où b agit sur le quotient $E\big/\tilde{A}(E)$. Or cette finitude modulo $a-$torsion est toujours vraie (voir [B.S.04]) pour la connexion de Gauss-Manin d'une fonction holomorphe car, grâce au théorème de désingularisation d'Hironaka, on peut injecter ce quotient par la $a-$torsion dans l'image directe du faisceau analogue sur une désingularisation. Ceci achève la preuve de l'assertion 2).

Passons à l'hypercohomologie du complexe $((\tilde{K}er\, df)^\bullet, d^\bullet)$. Comme il ne possède que deux faisceaux de cohomologie non nuls (en degré n et $n+1$) qui sont supportés par S, les familles de supports $\Phi = c \cap S$ et $\Phi = c$ donneront la même chose. Il suffit donc de traiter le cas $\Phi = c$.
La suite spectrale sphérique de l'hypercohomologie à supports compacts donne l'annulation des $\mathbb{H}^p_c(Y, ((\hat{K}er\, df)^\bullet, d^\bullet)$ pour tout $p \in [0, n]$[14].
Elle donne également la suite exacte de $\widehat{\mathcal{A}}-$modules :

$$0 \to H^1_c(Y, \hat{\mathcal{H}}^n) \to E'_c \to H^0_{\{0\}}(Y, \hat{\mathcal{H}}^{n+1}) \to H^2_c(Y, \hat{\mathcal{H}}^n) \to \cdots$$

où on a utilisé la propriété de prolongement analytique (voir 4.3.15) de la restriction à S^* du faisceau $\hat{\mathcal{H}}^{n+1}$ pour remplacer le support compact par le support $\{0\}$. Mais comme la restriction du faisceau $\hat{\mathcal{H}}^n$ à S^* est localement constant, on peut également remplacer $H^i_c(Y, \hat{\mathcal{H}}^n)$ par $H^i_{\{0\}}(Y, \hat{\mathcal{H}}^n)$ pour $i = 1, 2$. On conclut alors grâce au lemme 5.1.5.
Passons maintenant aux $\widehat{\mathcal{A}}-$modules E_Φ. La suite exacte de complexes

$$0 \to \hat{\mathcal{H}}^1[1] \to ((\hat{K}er\, df)^\bullet, d^\bullet) \to ((\tilde{K}er\, df)^\bullet, d^\bullet) \to 0$$

donne le tronçon suivant de suite exacte d'hypercohomologie :

$$0 \to H^n_\Phi(Y, \hat{\mathcal{H}}^1) \to E_\Phi \to E'_\Phi \to \cdots$$

qui permet immédiatemment de conclure, grâce au lemme 5.1.5, puisque l'on sait que $\hat{\mathcal{H}}^1 \simeq E_1 \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}_Y$ et que les groupes $H^i_\Phi(Y, \mathbb{C})$ sont des espaces vectoriels complexes de dimensions finies. ■

Remarque. Comme pour $\Phi = c \cap S$ on a $H^p_{c\cap S}(Y, \mathbb{C}) \simeq H^p_c(S, \mathbb{C})$ grâce à la contractibilité de Y (voir par exemple [B.04 b)] lemme 8.4.3), on obtient donc que pour $p \geq 3$ on a $H^p_{c\cap S}(Y, \mathbb{C}) \simeq 0$. Ceci montre que pour $n \geq 3$ on a $E_{c\cap S} \simeq E'_{c\cap S}$ et que pour $n = 2$ on a la suite exacte courte

$$0 \to H^2_c(S, \hat{\mathcal{H}}^1) \to E_{c\cap S} \to E'_{c\cap S} \to 0$$

[14] pour $p = n$ on utilise ici le fait, établi plus haut, que $\hat{\mathcal{H}}^n$ n'a pas de section non nulle à support compact.

On remarquera que, toujours grâce à la contractibilité de Y, si on prend la cohomologie à supports fermés, alors les hypercohomologies des complexes $\big((\hat{\mathrm{K}}\mathrm{er}\,\mathrm{df})^\bullet, \mathrm{d}^\bullet\big)$ et $\big((\tilde{\mathrm{K}}\mathrm{er}\,\mathrm{df})^\bullet, \mathrm{d}^\bullet\big)$ coïncident. $\square$

On a alors le corollaire suivant :

Corollaire 5.2.3 *Sous l'hypothèse* (HH) *on a le diagramme commutatif exact de $\hat{\mathcal{A}}-$modules réguliers géométriques :*

$$\begin{tikzcd}
 & & 0 \arrow[d] & & \\
 & & H_c^n(Y,\hat{\mathcal{H}}^1) \arrow[d] & & \\
 & & E_c \arrow[d] \arrow[dr, "can_c"] & & \\
0 \arrow[r] & H^1_{\{0\}}(S,\hat{\mathcal{H}}^n) \arrow[r, "i"] \arrow[dr, "\zeta"] & E'_{c\cap S} \arrow[r, "can_{c\cap S}"] \arrow[d, "\eta"] & E \arrow[r, "\theta"] & H^2_{\{0\}}(S,\hat{\mathcal{H}}^n) \\
 & & H_c^{n+1}(Y,\hat{\mathcal{H}}^1) & &
\end{tikzcd}$$

On identifiera au paragraphe suivant l'image de θ.

6 Dualités hermitiennes.

6.1 Préliminaires

6.1.1 Résolution fine.

Soit $f : X \to D$ un représentant de Milnor d'une fonction holomorphe telle que l'hypersurface $Y := f^{-1}(0)$ soit réduite.
Rappelons que le complexe de faisceaux $((Ker\,df)^\bullet, d^\bullet)$ est défini en posant

$$(Ker\,df)^p := Ker\,[\wedge df : \Omega^p \longrightarrow \Omega^{p+1}]$$

la différentielle d^p étant induite par la différentielle extérieure de de Rham.
Définissons de façon analogue le complexe de faisceaux $((Ker\,df_\infty)^\bullet, d^\bullet)$ en posant

$$(Ker\,df_\infty)^p := Ker\,[\wedge df : \mathcal{C}^{\infty,p} \longrightarrow \mathcal{C}^{\infty,p+1}]$$

la différentielle étant encore induite par la différentielle extérieure. Nous noterons par $((\hat{Ker}\,df_\infty)^\bullet, d^\bullet)$ le complexe obtenu par complétion formelle "en f".

Lemme 6.1.1 *Les inclusions naturelles de complexes :*

$$((Ker\, df)^\bullet, d^\bullet) \subset ((Ker\, df_\infty)^\bullet, d^\bullet)$$
$$((\hat{K}er\, df)^\bullet, d^\bullet) \subset ((\hat{K}er\, df_\infty)^\bullet, d^\bullet)$$

induisent des quasi-isomorphismes.

Preuve. Définissons le faisceau $(Ker\, df_\infty)^{p,q}$ comme étant celui des germes de formes $\mathcal{C}^\infty$ de type (p,q) vérifiant $df \wedge \varphi = 0$. Alors le complexe $((Ker\, df_\infty)^{p,\bullet}, d'')$ est une résolution[15] fine du faisceau $(Ker\, df)^p$. Donc le complexe simple associé au double complexe $((Ker\, df_\infty)^{\bullet,\bullet}, d', d'')$ est quasi-isomorphe au complexe $((Ker\, df)^\bullet, d^\bullet)$. Comme ce complexe simple coïncide avec le complexe $((Ker\, df_\infty)^\bullet, d^\bullet)$, la première assertion est prouvée.
Le passage aux complétés formels est immédiat. ■

Lemme 6.1.2 *Pour tout* $p \in [1, n-1]$ *on a, sous l'hypothèse* (HH)

$$(Ker\, df_\infty)^p = df \wedge \mathcal{C}^{\infty,p-1}$$

Preuve. Fixons $p \in [1, n-1]$. Soit $\varphi = \sum_{|I|+|J|=p} \varphi_{I,J} dx^I \wedge d\bar{x}^J$ vérifiant $df \wedge \varphi = 0$. Alors pour chaque J fixé on a $df \wedge \sum_I \varphi_{I,J} dx^I = 0$. On est donc ramené au problème pour les formes de type (q,0) avec $q \leq n-1$. Mais on a l'isomorphisme $\mathcal{C}^{\infty,(q,0)} \simeq \mathcal{C}^\infty \otimes_{\mathcal{O}_X} \Omega_X^q$. La platitude de $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathcal{O}_X$ d'après Malgrange [M.62] ramène donc notre assertion au cas holomorphe (éventuellement complété formellement "en f").
Ce cas est alors conséquence de l'hypothèse (HH) grâce au lemme 4.1.2. ■

Remarque. Comme la famille des supports compacts (dans Y) ainsi que la famille $c \cap S$ introduite au paragraphe 4 sont paracompactifiantes, nous pouvons calculer les hypercohomologies E_c et $E_{c\cap S}$ grâce au complexe $((\hat{K}er\, df_\infty)^\bullet, d^\bullet)$ dont les faisceaux sont fins. Cela nous donne les isomorphismes :

$$E_c \simeq H^{n+1}(\Gamma_c(Y, (\hat{K}er\, df)^\bullet), d^\bullet)$$
$$E_{c\cap S} \simeq H^{n+1}(\Gamma_{c\cap S}(Y, (\hat{K}er\, df)^\bullet), d^\bullet). \qquad (@)$$

Ce point sera utilisé dans la construction de la forme sesquilinéaire h. □

6.1.2 Développements asymptotiques et transformation de Mellin.

La transformation de Mellin pour une fonction $\varphi \in \mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{C}^*$ localement intégrable et à support borné est définie par la formule

$$\mathcal{M}_\varphi(\lambda, m) := \frac{1}{2i\pi} \int_{\mathbb{C}^*} s^{\lambda+m} \bar{s}^{\lambda-m} \varphi(s, \bar{s}).ds \wedge d\bar{s}$$

[15] d'après Malgrange [M.62].

Nous allons considérer de telles fonctions données par des intégrale-fibres du type

$$s \to (\frac{1}{2i\pi})^n \int_{f=s} \frac{\omega}{df} \wedge \overline{\frac{\omega'}{df}}$$

où ω, ω' sont des $(n+1)-$formes sur X vérifiant $df \wedge \omega = 0 = df \wedge \omega'$ et des conditions de supports convenables.
Définissons pour $n \in \mathbb{N}$ fixé

$$|\Xi|^2 := \sum_{r \in]-1,0] \cap \mathbb{Q} \ , \ j \in [0,n]} \mathbb{C}[[s,\bar{s}]].|s|^{2r}.(Log|s|^2)^j \ .$$

Les opérations a et b sont données sur $|\Xi|^2$ respectivement par la multiplication par s et la primitive (en s) sans constante. De plus on a une conjuguaison évidente qui vérifie les mêmes relations que ci-dessus où $\bar{a}$ et $\bar{b}$ sont définies respectivement par multiplication par $\bar{s}$ et par la primitive en $\bar{s}$ sans constante.
Les développements asymptotiques de nos intégrale-fibres seront dans $|\Xi|^2$ d'après le théorème principal de [B. 82].
La détermination des pôles de $\mathcal{M}_\varphi(\lambda, m)$ si φ admet comme développement asymptotique quand $|s| \to 0$ l'unique terme $s^p\bar{s}^q.|s|^{2r}.(Log|s|^2)^j$ où p, q, j sont des entiers naturels et où $r \in]-1,0]$, est un exercice simple qui montre l'équivalence entre la donnée des termes des développements asymptotiques d'une intégrale-fibre et la donnée des pôles du prolongement méromorphe de la transformée de Mellin de cette intégrale-fibre.
La transformation de Mellin complexe donne ainsi une application bijective entre l'espace $|\Xi|^2$ et les parties polaires des transformées de Mellin correspondantes. Ces dernières sont des éléments de l'espace

$$\mathcal{M} := \big\{F : \frac{1}{2}\mathbb{Z} \to \mathcal{M}ero(\mathbb{C}) \text{ avec } F_m \text{ holomorphe sur } \mathcal{Q}_m\big\}$$
$$\text{avec} \quad \mathcal{Q}_m := \{\lambda \in \mathbb{C}/\Re(\lambda+m) > -1 \quad \text{et} \quad \Re(\lambda - m) > -1\}.$$

Quand un élément F de $\mathcal{M}$ est la transformée de Mellin d'une fonction admettant un développement asymptotique dans $|\Xi|^2$ nous noterons par $PP(F)$ l'élément de $|\Xi|^2$ correspondant.
Nous utiliserons également le quotient $|\Xi'|^2 := |\Xi|^2 \big/ \mathbb{C}[[s,\bar{s}]]$ de l'espace des développements asymptotiques modulo les développement asymptotiques des fonctions $\mathcal{C}^\infty$ au voisinage de l'origine. Pour un élément F de $\mathcal{M}$ qui est la transformée de Mellin d'une fonction admettant un développement asymptotique dans $|\Xi|^2$ nous noterons par $PP'(F)$ l'élément de $|\Xi'|^2$ correspondant.

Définissons sur $\mathcal{M}$ les opérations "a" et "b" et la conjuguaison "$conj$" de la façon suivante :

$$a(F)_m(\lambda) := F_{m+\frac{1}{2}}(\lambda)$$
$$b(F)_m(\lambda) := \frac{F_{m+\frac{1}{2}}(-m-\frac{1}{2}) - F_{m+\frac{1}{2}}(\lambda+\frac{1}{2})}{\lambda+m+1}$$
$$conj(F)_m(\lambda) := \overline{F_{-m}(\bar{\lambda})}$$

On vérifie facilement que $\mathcal{M}$ est stable par ces opérations, que l'on a l'identité $ab - ba = b^2$ et que $conj$ est une involution anti-$\mathbb{C}-$linéaire . On définira $\bar{a}$ et $\bar{b}$ par les formules suivantes

$$\bar{a} := conj \circ a \circ conj \qquad \bar{b} := conj \circ b \circ conj \ .$$

Il est clair qu'avec ces définitions la transformation de Mellin et les applications PP et PP' sont compatibles à $a, b, \bar{a}, \bar{b}$ et à la conjuguaison.

6.2 L'accouplement (a,b)-sesquilinéaire h.

6.2.1 Existence.

Plaçons-nous sous l'hypothèse (HH).
Notons par E et $E'_{c\cap S}$ les groupes

$$E := H^0_{\{0\}}(Y, \hat{\mathcal{H}}^{n+1}) \quad \text{et} \quad E'_{c\cap S} := \mathbb{H}^{n+1}_{c\cap S}(Y, \tilde{K}er\, df^\bullet, d^\bullet).$$

Rappelons que pour $n \geq 3$ on a un isomorphisme "naturel" $E_{c\cap S} \to E'_{c\cap S}$ et que pour $n = 2$ on a la suite exacte $0 \to H^2_{c\cap S}(Y, \hat{\mathcal{H}}^1) \to E_{c\cap S} \to E'_{c\cap S} \to 0$ où on a noté $E_{c\cap S} := \mathbb{H}^{n+1}_{c\cap S}(Y, \hat{K}er\, df^\bullet, d^\bullet)$.
Le résultat principal de ce paragraphe sera le théorème suivant :

Théorème 6.2.1 *Sous l'hypothèse* (HH) *on a pour* $n \geq 2$ *un accouplement (a,b)-sesquilinéaire naturel, non dégénéré au sens précisé ci-dessous*

$$h : E'_{c\cap S} \times E \longrightarrow |\Xi'|^2$$

donné par intégration dans les fibres de f *.*

Précisons déjà ce que signifie "donné par intégration sur les fibres de f ". Soient ω resp. ω' des $(n+1)-$formes $\mathcal{C}^\infty$ annulées par $\wedge df$ et par d, le support de ω' rencontrant S suivant un compact K. Soit alors $\rho \in \mathcal{C}^\infty_c(X)$ vérifiant $\rho \equiv 1$ au voisinage de K . Alors nous définirons

$$h([\omega'], [\omega]) = \frac{1}{(2i\pi)^n} \int_{f=s} \rho . \frac{\omega'}{df} \wedge \overline{\frac{\omega}{df}} \ \in |\Xi'|^2. \qquad (\sharp)$$

En fait, il sera beaucoup plus commode d'utiliser la transformée de Mellin de l'intégrale-fibre et h sera donnée par la formule

$$(2i\pi)^n . h([\omega'], [\omega]) = PP'\Big(\int_X \rho . f^{\lambda+m} \bar{f}^{\lambda-m} \omega' \wedge \bar{\omega} \Big). \qquad (\natural)$$

Précisons maintenant ce que nous entendons par accouplement "non dégénéré".

Définition 6.2.2 (Non dégénérescence.) *La non dégénérescence correspond aux propriétés suivantes :*

- *Pour tout élement* $[\omega'] \in E'_{c\cap S}$ *qui n'est pas de* $b-$*torsion, il existe un élément* $[\omega] \in E$ telle que $h([\omega'], [\omega]) \neq 0$ dans $|\Xi'|^2$.
- *Pour tout élément* $[\omega] \in E$ *qui n'est pas de* $b-$*torsion, il existe un élément* $[\omega] \in E'_{c\cap S}$ tel que $h([\omega'], [\omega]) \neq 0$ dans $|\Xi'|^2$.

La preuve de la non-dégénérescence de h sera donnée au 6.4.2 après la preuve du théorème 6.4.1 dont elle utilise le corollaire.
L'existence, elle, est vraie en général sous l'hypothèse (H 0), et probablement pour une fonction holomorphe générale.

Démonstration. Pour $n \geq 3$ l'isomorphismisme $E_{c\cap S} \to E'_{c\cap S}$ et la remarque 6.1.1 permettent de représenter toute classe $[\omega'] \in E'_{c\cap S}$ par une section $\omega' \in \Gamma_{c\cap S}(Y, \hat{K}er\, df^{n+1}_{\infty} \cap Kerd)$. On representera une classe $[\omega] \in E$ par une section $\Gamma(Y, \hat{\Omega}^{n+1})$. Définissons donc par une des formules $(\sharp)$ ou $(\natural)$. Nous préciserons le cas $n = 2$ plus loin. L'indépendance du choix de ρ est immédiate car le support de $(\rho_1 - \rho_2).\omega'$ ne rencontre plus S. Donc le développement asymptotique correspondant est dans $\mathbb{C}[[s, \bar{s}]]$. Changeons le représentant ω' de la classe $[\omega']$ de $E_{c\cap S}$. Soit $\omega' + d\xi$ un autre représentant de la classe $[\omega']$. On a donc $Supp(\xi) \cap S$ qui est compact. Quitte à choisir $\rho \equiv 1$ sur un compact assez gros on peut supposer que l'on a bien $\rho \equiv 1$ au voisinage de $K \cup (S \cap Supp(\xi))$. Alors on aura pour $\Re(\lambda) - |m| \gg 1$

$$d(\rho.f^{\lambda+m}\bar{f}^{\lambda-m}.\xi \wedge \bar{\omega}) = d\rho \wedge f^{\lambda+m}\bar{f}^{\lambda-m}.\xi \wedge \bar{\omega} \;+\; \rho \wedge f^{\lambda+m}\bar{f}^{\lambda-m}.d\xi \wedge \bar{\omega}$$

puisque l'on a $df \wedge \omega' = df \wedge \omega = d\omega' = d\omega = 0$. Comme le support de $d\rho \wedge \xi$ ne rencontre pas S la formule de Stokes et le prolongement analytique montrent que le changement de ω' en $\omega' + d\xi$ ne change pas l'élément de $|\Xi'|^2$ correspondant. Le changement de representant pour la classe $[\omega] \in E$ est analogue.
La (a,b)-sesquilinéarité est facile.
Précisons maintenant le cas $n = 2$. Il nous suffit en fait de montrer que notre définition de h passe au quotient par l'image de l'application

$$H^2_{c\cap S}(Y, \hat{\mathcal{H}}^1) \to E_{c\cap S}.$$

Ceci est une conséquence facile du lemme suivant.

Lemme 6.2.3 *On suppose* $n = 2$. *Soit* θ *une* $2-$*forme* $\mathcal{C}^\infty$ *à support compact dans* X *vérifiant* $d\theta = 0$. *Alors pour chaque* $\omega \in \Gamma(X, \hat{\Omega}^3)$ *le développement asymptotique de l'intégrale fibre* $s \to \int_{f=s} \theta \wedge \overline{\frac{\omega}{df}}$ *est dans* $\bar{s}^{-1}\mathbb{C}[[\bar{s}]]$.

Preuve. Commençons par traiter le cas où $\omega = df \wedge \alpha$, avec $\alpha \in \Gamma(X, \hat{\Omega}^2)$. On a alors, au sens des distributions sur un voisinage de l'origine dans $\mathbb{C}$, l'égalité

$$d\int_{f=s} \theta \wedge \bar{\alpha} = \Big(\int_{f=s} \theta \wedge \overline{\frac{d\alpha}{df}}\Big).d\bar{s}.$$

On a donc une intégrale-fibre anti-holomorphe et le développement asymptotique est dans $\mathbb{C}[[\bar{s}]]$ dans ce cas. Comme il existe un entier $k \leq 3$ tel que l'on ait $f^3.\hat{\Omega}^3 \subset df \wedge \hat{\Omega}^2$ d'après Briançon-Skoda, on obtient pour ω générale que l'intégrale fibre a son développement dans $\bar{s}^{-3}.\mathbb{C}[[\bar{s}]]$. On conclut en remarquant que l'intégrale-fibre est toujours L^1_{loc}. ■

Dans le cas d'une singularité isolée, on a égalité entre $E'_{c\cap S}$ et E. On retrouve la forme hermitienne canonique de [B.85] sous la forme "(a,b)-module" (comparer avec [B.05 a)]).

La fin de la preuve du théorème sera donnée plus loin (voir 6.4.2).

6.3 L'accouplement (a,b)-sesquilinéaire k.

La forme hermitienne canonique des hypersurfaces à singularité isolée (voir [B.85] ou [B.05 a)]) transverses au points génériques de S^* fournissent (composante par composante) un accouplement (a,b)-sesquilinéaire non dégénéré et localement constant sur le système local $\hat{\mathcal{H}}^n$ de (a,b)-modules :

$$\underline{k} : \hat{\mathcal{H}}^n \times \hat{\mathcal{H}}^n \to \underline{\mathbb{C}}_{S^*} \otimes |\Xi'|^2.$$

Après intégration sur le cycle fondamental de S^*[16] on obtient un accouplement (a,b)-sesquilinéaire global et non dégénéré

$$k : H^0(S^*, \hat{\mathcal{H}}^n) \times H^1(S^*, \hat{\mathcal{H}}^n) \to |\Xi'|^2.$$

Voici l'analogue de la proposition 1 p.457 de [B.91] qui permet de calculer $\underline{k}$

Proposition 6.3.1 *Soit V un ouvert de $X^* = X \setminus \{0\}$ et soient w et w' deux sections sur V du faisceau $(\hat{Ker\, df_\infty})^n \cap Ker\, d$. Notons par e et e' les éléments correspondants de $\Gamma(V, \hat{\mathcal{H}}^n)$. Alors la fonction localement constante sur $U := V \cap S^*$ donnée par $\underline{k}(e, e')$ qui est à valeurs dans $|\Xi'|^2$ vérifie :*

$$(2i\pi)^n.\int_{S^*} \underline{k}(e, e').\varphi = PP'\Big(\int_X f^{\lambda+m}\bar{f}^{\lambda-m} w \wedge \bar{w'} \wedge \varphi\Big)$$

pour chaque forme différentielle $\varphi \in \mathcal{C}^\infty(V)$ de degré 2 vérifiant

- *(i) Supp $\varphi \cap S^*$ est compact.*
- *(ii) $d\varphi = 0$ au voisinage de U.*

[16] défini en coupant S^* par une sphère de centre 0 et de rayon assez petit.

La preuve est analogue à celle de la proposition 1 de [B.91] (voir les pages 457-459).
Donnons maintenant une formule pour l'accouplement global k :

Proposition 6.3.2 *On considère maintenant un voisinage ouvert V de S^* dans X^* et la donnée de $w \in \Gamma(V, (\hat{K}er\, df_\infty)^n \cap Ker\, d)$ et de $w' \in \Gamma(V, d(\hat{K}er\, df_\infty)^n)$ correspondants à des éléments $e \in H^0(S^*, \hat{\mathcal{H}}^n)$ et $\varepsilon \in H^1(S^*, \hat{\mathcal{H}}^n)$*[17]*. Soit $\gamma \in \mathcal{C}^\infty$ une $1-$forme différentielle sur V vérifiant*

- *(i) Supp $\gamma \cap S^*$ est compact.*
- *(ii) $d\gamma = 0$ au voisinage de S^*.*
- *(iii) γ induit le cycle fondamental de S^* dans $H^1_c(S^*, \mathbb{C})$.*

Soit $(\rho_\sigma)_{\sigma\in\Sigma}$ une partition $\mathcal{C}^\infty$ de l'unité sur V subordonnée à un recouvrement ouvert $(\mathcal{U}_\sigma)_{\sigma\in\Sigma}$ de $Supp\,\gamma$. Posons $w'_{|\mathcal{U}_\sigma} = du_\sigma$ où $u_\sigma \in \Gamma(\mathcal{U}_\sigma, (\hat{K}er\, df^n_\infty))$ puis

$$v := \sum_\sigma \sum_{\sigma'} \rho_\sigma . d\rho_{\sigma'} \wedge (u_\sigma - u_{\sigma'}).$$

On remarquera que l'on a $v = -\sum_{\sigma'} d\rho_{\sigma'} \wedge u_{\sigma'}$ au voisinage de $Supp\ \gamma$.
Alors on a

$$(2i\pi)^n.k(e,\varepsilon) = PP'\Big(\int_X f^{\lambda+m}\bar{f}^{\lambda-m}\gamma \wedge w \wedge \bar{v}\Big).$$

La preuve se déduit facilement de la formule de la proposition précédente en détaillant la dualité de Poincaré sur S^* quand on calcule en cohomologie de Čech le H^1_c.

6.4 Relation entre h et k.

6.4.1 Le théorème et la détermination de $Im\theta$.

Le théorème suivant donne la relation entre nos deux accouplements (a,b)-sesquilinéaires.

Théorème 6.4.1 *Pour tout $[x] \in H^1_{\{0\}}(S, \hat{\mathcal{H}}^n)$ et tout $[y] \in E$ on a*

$$k([x], \theta([y])) = h(i([x]), [y])$$

où les applications (a,b)-linéaires i et θ sont celles de la suite exacte

$$0 \to H^1_{\{0\}}(S, \hat{\mathcal{H}}^n) \xrightarrow{i} E'_{c\cap S} \to E \xrightarrow{\theta} H^1(S^*, \hat{\mathcal{H}}^n).$$

[17] via le connecteur $H^0(V, d(\hat{K}er\, df_\infty)^n) \to H^1(V, (\hat{K}er\, df_\infty)^n \cap Ker\, d)$ et l'application déduite du quotient $(\hat{K}er\, df_\infty)^n \cap Ker\, d) \to \hat{\mathcal{H}}^n$. On remarquera que le connecteur est surjectif car le faisceau $(\hat{K}er\, df_\infty)^n$ est fin et que l'application déduite du quotient est également surjective pour $n \geq 2$ (voir la remarque 6.4.1 ci-après).

Démonstration. Soit donc $y \in \Gamma(Y, \hat{\Omega}^{n+1})$ induisant la classe $[y] \in H^0_{\{0\}}(Y, \hat{\mathcal{H}}^{n+1})$[18]. Considérons également $[x] \in H^1_{\{0\}}(S, \hat{\mathcal{H}}^n)$ représentée par

$$x \in \Gamma(V, (\hat{K}er\, df_\infty)^n \cap Ker\, d)$$

où V est un voisinage ouvert de S^* dans Y^*.
Avant de poursuivre la preuve du théorème, faisons la remarque suivante.

Remarque. Un tel représentant existe pour $n \geq 2$ car on a

$$H^1(V, d(\hat{K}er\, df_\infty)^{n-1}) \simeq H^2(V, d(\hat{K}er\, df_\infty)^{n-2}) \simeq \cdots \simeq H^n(V, \hat{\mathcal{H}}^1) \simeq 0$$

puisque $\hat{\mathcal{H}}^1$ est un faisceau constant sur Y et que l'on peut supposer que V est homotopiquement équivalent à S^*. $\square$

Démonstration (suite). Considérons une fonction $\chi \in \mathcal{C}^\infty(Y)$ vérifiant $\chi \equiv 1$ au voisinage de ∂S le bord de S, $\chi \equiv 0$ au voisinage de l'origine, et à support dans V. Alors on peut choisir $\gamma = d\chi$ dans la proposition précédente. Fixons alors le recouvrement ouvert et la partition de l'unité subordonnée comme plus haut et écrivons

$$y_{|\mathcal{U}_\sigma} = du_\sigma \quad \text{avec} \quad u_\sigma \in \Gamma(\mathcal{U}_\sigma, (\hat{K}er\, df)^n).$$

Notons alors qu'au voisinage de $K := Support\,(d\chi) \cap S^*$ on a

$$d(\sum_\sigma \rho_\sigma.u_\sigma) = -v + \sum_\sigma \rho_\sigma.du_\sigma = -v + y. \tag{@}$$

Comme $i([x])$ est représentée par

$$d\chi \wedge x \in \Gamma_{c\cap S}(Y, (\hat{K}er\, df_\infty)^{n+1} \cap Ker\, d)$$

on aura :

$$(2i\pi)^n.h(i([x]), [y]) = PP'\big(\int_X f^{\lambda+m}\bar{f}^{\lambda-m} d\chi \wedge x \wedge \bar{y}\big).$$

La proposition précédente donne d'autre part :

$$(2i\pi)^n.k([x], \theta([y])) = PP'\big(\int_X f^{\lambda+m}\bar{f}^{\lambda-m} d\chi \wedge x \wedge \bar{v}\big).$$

On conclut alors grace à (@), aux relations $df \wedge x = 0$ et $df \wedge (\sum \rho_\sigma.u_\sigma) = 0$ et à la formule de Stokes . $\blacksquare$

Notons par $H^1(S^*, \hat{\mathcal{H}}^n)^\perp$ l'orthogonal pour k du sous-(a,b)-module $H^0(S, \hat{\mathcal{H}}^n)$ de $H^0(S^*, \hat{\mathcal{H}}^n)$. Alors k induit encore un accouplement (a,b)-sesquilinéaire non dégénéré

$$\tilde{k} : H^1_{\{0\}}(S, \hat{\mathcal{H}}^n) \times H^1(S^*, \hat{\mathcal{H}}^n)^\perp \to |\Xi'|^2.$$

[18] rappelons que $\hat{\mathcal{H}}^{n+1} \simeq \hat{\Omega}^{n+1}/d(\hat{K}er\, df)^n$. Donc sur Y^* la $(n+1)-$forme holomorphe y est localement dans $d(\hat{K}er\, df)^n$.

Corollaire 6.4.2 *On a* $Im\,\theta \subset H^1(S^*, \hat{\mathcal{H}}^n)^\perp$. *De plus les localisés en* b *des deux (a,b)-modules correspondants coïncident.*

Preuve. La première partie de ce corollaire se déduit immédiatement du théorème précédent en remarquant que si $x \in \Gamma(Y, (\hat{Ker}\, df_\infty)^n \cap Ker\, d)$, quitte à remplacer $d\chi$ par $d\rho$ où $\rho \in \mathcal{C}_c^\infty(Y)$ vaut identiquement 1 près de l'origine (ce qui ne change pas le "PP' " de l'intégrale puisque l'on ne change pas le fait que l'on induit la classe du cycle fondamental de S^* dans $H_c^1(S^*, \mathbb{C})$), on peut appliquer la formule de Stokes et obtenir ainsi la nullité du " PP' ".
Le fait que les localisés en b des (a,b)-modules correspondants coïncident est assez délicat à montrer. Il se déduit de la proposition 12 de [B.91] dans le cas d'une valeur propre $\neq 1$ de la monodromie et de [B.04 b)] (voir le début du paragraphe 9 de cet article) dans le cas de la valeur propre 1. ■

6.4.2 Preuve de la non-dégénérescence de h.

La (a,b)-sesquilinéarité de h va nous permettre de raisonner sur les développements en somme de monômes des éléments de $E_{c\cap S}$ et E , c'est à dire de travailler dans les saturés par $b^{-1}a$ des (a,b)-modules associés (car h s'étend à ces saturés, puisque $|\Xi'|^2$ est à pole simple).
Commençons par considérer le cas de $[w'] \in E'_{c\cap S}$ dont l'image par

$$can_{c\cap S} : E'_{c\cap S} \to E$$

n'est pas de $b-$torsion. Alors on peut trouver dans le développement en série de monômes de $can_{c\cap S}([w'])$ un bloc de Jordan non trivial pour une valeur propre de la monodromie agissant sur $H^n(F, \mathbb{C})$ où F désigne la fibre de Milnor de f à l'origine. La dualité de Poincaré (hermitienne) sur F permet alors de trouver un élément de $H_c^n(F, \mathbb{C})$ dans le sous-espace spectral correspondant à la même valeur propre de la monodromie qui ne donne pas 0 sur ce bloc de Jordan. Pour une valeur propre différente de 1 de la monodromie, on en conclut facilement à l'existence d'un élement de E_c dont l'image $[w]$ dans E vérifiera $h([w'], [w]) \neq 0$. Dans le cas de la valeur propre 1 il nous faut montrer l'existence d'un pôle d'ordre au moins 2 aux entiers négatifs assez grands (en valeur absolue) dans le prolongement analytique correspondant. Ce résultat est beaucoup moins simple ; il est prouvé dans le théorème 8.6.1 de [B.04 b)] (sous l'hypothèse $n \geq 2$ que nous faisons ici).
Si l'on suppose maintenant que $can_{c\cap S}([w'])$ est de $b-$torsion, quitte à remplacer $[w']$ par $b^k[w']$ ce qui ne change rien à ce que nous voulons démontrer, puisque $|\Xi'|^2$ n'a pas de $b-$torsion, nous pouvons supposer que $[w'] = i([x])$ où $[x] \in H^1_{\{0\}}(S, \hat{\mathcal{H}}^n)$. Mais la non-dégénérescence de k ainsi que le corollaire 6.9 permettent alors de trouver un élément $[y] \in E$ tel que l'on ait

$$k(i([x], b^m\theta([y])) \neq 0 \quad \text{dans} \quad |\Xi'|^2.$$

On en conclut, d'après le théorème 6.8, que l'on a $h([w'], [y]) \neq 0$, ce qui montre la première partie de cette non dégénérescence.

Considérons maintenant $[w] \in E$ et supposons déja que $\theta([w])$ ne soit pas de $b-$torsion dans $H^1(S^*, \hat{\mathcal{H}}^n)$. Alors une utilisation du corollaire 6.9 et de la non dégénérescence de k donnent alors une classe $[x] \in H^1_{\{0\}}(S, \hat{\mathcal{H}}^n)$ qui vérifiera $k([x], \theta([w]) \neq 0$. On conclut ce cas grace au théorème 6.8.
Si, enfin, $\theta([w])$ est de torsion, alors, quitte à remplacer $[w]$ par $b^m[w]$, ce qui, à nouveau, ne change rien au problème, on peut supposer que $[w] = can_{c\cap S}([w_1])$ où $[w_1] \in E'_{c\cap S}$. Mais alors, grace au premier cas traité, on trouve, dans le cas d'une valeur propre différente de 1 une classe $[v] \in E_c$ telle que $h([w_1], can[v]) \neq 1$. On conclut dans ce cas grâce à l'aspect hermitien de la restriction de h à $E'_{c\cap S} \times E'_{c\cap S}$.
Pour conclure, il nous reste que le cas de la valeur propre 1. Ce cas est conséquence du théorème 8.6.1 de [B.04 b)]. Ceci achève la preuve du théorème 6.4. ■

7 Appendice.

7.1 L'exponentielle de $b^{-1}.a$ pour un (a,b)-module à pôle simple.

Pour un (a,b)-module E nous noterons par $q_n : E \to E/b^n.E$ l'application quotient. On remarquera que l'on a $E \simeq \lim_{\infty \leftarrow n} E/b^n.E$ où le système projectif est défini par les applications quotient $E/b^m.E \to E/b^n.E$ pour $m \geq n$.

Définition 7.1.1 • *1) Soit E un (a,b)-module et soit U une variété complexe. On dira que l'application $f : U \to E$ est holomorphe si pour tout entier $n \geq 1$ l'application $q_n \circ f : U \to E/b^n.E$ est holomorphe.*

- *2) Soit F un autre (a,b)-module et soit $\varphi \in L_{\mathbb{C}}(E, F)$. Nous dirons que $\varphi \in L^b_{\mathbb{C}}(E, F)$ si pour chaque entier $n \geq 1$ on a $\varphi(b^n.E) \subset b^n.F$. Une telle application linéaire induit des applications linéaires $\varphi_n : E/b^n.E \to F/b^n.F, \forall n \in \mathbb{N}$ qui sont compatibles aux systèmes projectifs associés à E et F et on a $\varphi = \lim_{\infty \leftarrow n} \varphi_n$.*
- *3) On notera par $Aut^b_{\mathbb{C}}(E)$ le sous-groupe des applications bijectives de $End^b_{\mathbb{C}}(E) := L^b_{\mathbb{C}}(E, E)$.*
- *4) On dira que l'application $f : U \to L^b_{\mathbb{C}}(E, F)$ est holomorphe si pour chaque $n \geq 1$ l'application $U \to L_{\mathbb{C}}(E/b^n.E, F/b^n.F)$ donnée par $t \to q_n \circ f(t) \circ q_n^{-1}$ est holomorphe.*

Lemme 7.1.2 *Soit E un (a,b)-module à pôle simple.
Alors l'application $\Phi : \mathbb{C} \to Aut^b_{\mathbb{C}}(E)$ donnée par*

$$t \to \Phi(t).x := exp\big(t.(b^{-1}a)\big).x$$

est holomorphe. De plus on a les relations $\Phi(t) \circ \Phi(t') = \Phi(t + t')\ \forall t, t' \in \mathbb{C}$, $\Phi(0) = Id_E$, $e^t.b.\Phi(t) = \Phi(t).b$, $e^t.a.\Phi(t) = \Phi(t).a$.

Preuve. Commençons par préciser que pour chaque $t \in \mathbb{C}$ et chaque $x \in E$ la série $\sum_0^{+\infty} \frac{t^k}{k!}.(b^{-1}a)^k.x$ définit bien un élément de E. En effet, pour chaque $n \geq 1$ la série

$$\sum_0^{+\infty} \frac{t^k}{k!}.(b^{-1}a)^k.q_n(x)$$

converge dans l'espace vectoriel de dimension finie $E/b^n.E$ dont $b^{-1}a$ définit un endomorphisme, grâce à la relation $(b^{-1}a).b^n = b^n.(b^{-1}a + n)$.
Notons par $y_n \in E/b^n.E$ la somme de cette série. On vérifie alors aisément que les y_n définissent un élément $y \in E \simeq \lim_{\infty \leftarrow n} E/b^n.E$, puisque, par définition, $b^{-1}a$ est induite sur chaque quotient $E/b^n.E$ par l'application $b^{-1}a : E \to E$.
Nous poserons $\Phi(t).x = y$. Ceci définit l'application $\Phi : \mathbb{C} \to End_{\mathbb{C}}(E)$. Comme on a, grâce aux relations $(b^{-1}a)^k.b^n = b^n.(b^{-1}a + n)^k$,

$$\Phi(t).b^n.x = b^n.e^{n.t}.\Phi(t).x$$

on en déduit que $\Phi(t) \in End^b_{\mathbb{C}}(E)$. L'holomorphie est évidente, compte tenu de nos définitions et de la construction de Φ.
La relation $\Phi(t) \circ \Phi(t') = \Phi(t + t')$ est élémentaire et montre que l'on a bien $\Phi(t) \in Aut^b_{\mathbb{C}}(E), \forall t \in \mathbb{C}$.
Les relations de "commutation" avec a et b sont laissées au lecteur. ■

Remarque. En particulier, pour $\delta \in \mathbb{Z}$ l'automorphisme $\mathbb{C}-$linéaire $exp\big(2i\pi.\delta.(b^{-1}a)\big)$ commute à a et b.
Réciproquement, pour $E \neq \{0\}$, si $exp\big(t.(b^{-1}a)\big)$ commute à a et b alors on aura $t \in 2i\pi.\mathbb{Z}$. □

Lemme 7.1.3 *Soit $\Phi : E \to F$ un morphisme (a,b)-linéaire entre deux (a,b)-modules à pôles simples. Alors pour tout $t \in \mathbb{C}$ on a*

$$exp(t.(b^{-1}a)) \circ \Phi = \Phi \circ exp(t.(b^{-1}a)). \qquad (@)$$

Preuve. Constatons déja que l'on a immédiatement $(b^{-1}a) \circ \Phi = \Phi \circ (b^{-1}a)$. Les deux membres de (@) sont solutions du système différentiel

$$\frac{d}{dt}(\theta(t)) = (b^{-1}a) \circ \theta(t) = \theta(t) \circ (b^{-1}a) \quad \text{avec} \quad \theta(0) = \Phi$$

où $t \to \theta(t)$ est holomorphe à valeurs dans $L^b_{\mathbb{C}}(E, F)$. L'égalité (@) s'en déduit grace à l'unicité de la solution du problème de Cauchy. ■
Terminons ce paragraphe en décrivant le plus grand sous-(a,b)-module à pôle simple d'un (a,b)-module.

Proposition 7.1.4 *Soit E un (a,b)-module.*
Posons $F := \{x \in E / \forall m \in \mathbb{N}, a^m.x \in b^m.E\}$. Alors F est le plus grand sous-(a,b)-module à pôle simple contenu dans E. Si E est régulier, F est de codimension finie dans E et il est donc de même rang que E sur $\mathbb{C}[[b]]$.

PREUVE. Montrons déja que si $G := \{x \in E / \forall m \in \mathbb{N}, a^m.x \in b^{m+1}.E\}$ alors on aura $G = b.F$. Pour cela nous utiliserons les identités suivantes

$$a^m.b = b.a^m + m.b.a^{m-1}.b \qquad \forall m \geq 0$$

qui sont conséquences de la relation de commutation $a.b - b.a = b^2$. En effet, pour $m = 1$ c'est la relation de commutation. Si cette identité est vraie pour $m \geq 1$ donné, on écrit $a^{m+1}.b = a.(b.a^m + m.b.a^{m-1}.b) = (b.a + b^2).(a^m + m.a^{m-1}.b) = b.a^{m+1} + m.b.a^m.b + b.a^m.b = b.a^{m+1} + (m+1).b.a^m.b$.
Soit $x \in F$. Montrons que si $a^{m-1}.b.x \in b^m.E$ pour un entier $m \geq 1$ alors on a $a^m.b.x \in b^{m+1}.E$. En effet $a^m.b.x = b.a^m.x + m.b.a^{m-1}.b.x \in b.b^m.E$. Donc $b.x \in G$.
Réciproquement, si $y \in G$. Alors il existe $z \in E$ vérifiant $y = b.z$. Montrons que $z \in F$: on a

$$\forall m \geq 0 \quad b.a^m.z = a^m.y - m.b.a^{m-1}.y \in b^{m+1}.E$$

puisque $y \in G$. Donc, puisque b est injective, $a^m.z \in b^m.E$ et on a bien $z \in F$.
Maintenant on a $a.F \subset b.F$. Ceci résulte immédiatement du fait que l'on a $a.F \subset G = b.F$. Donc F est un sous-(a,b)-module à pôle simple de E (éventuellement réduit à $\{0\}$). C'est le plus grand, car si H est un sous-(a,b)-module à pôle simple de E, pour chaque $h \in H$ et chaque entier m on aura $a^m.h \in b^m.H \subset b^m.E$ et donc $h \in F$.
Si on suppose E régulier, il est de codimension finie (sur $\mathbb{C}$) dans son saturé par $b^{-1}a$ $\tilde{E}$ qui est à pôle simple. Alors pour $m \in \mathbb{N}$ assez grand, on aura $b^m.\tilde{E} \subset E$. On a ainsi un sous-(a,b)-module à pôle simple de E qui est de codimension finie. C'est alors à fortiori le cas pour F. ■

7.2 Modules sur le faisceau de $\mathbb{C}-$algèbres $\mathcal{O}_D[[b]]$.

Dans ce qui suit D désigne un disque ouvert de centre 0 dans $\mathbb{C}$.

7.2.1 Cohérence.

Proposition 7.2.1 *Le faisceau de* $\mathbb{C}-$*algèbres* $\mathcal{O}_D[[b]]$ *est cohérent.*

REMARQUE. Ce faisceau, qui à l'ouvert $U \subset D$ associe la $\mathbb{C}-$algèbre $\mathcal{O}(U)[[b]]$ a pour germe en $z \in D$ la limite inductive pour U contenant z des $\mathcal{O}(U)[[b]]$. Elle est strictement contenue dans la $\mathbb{C}-$algèbre $\mathcal{O}_{D,z}[[b]]$. Par exemple, la série $\sum_{m\geq 1}(z - 1/m)^{-1}.b^m$ est un élément de $(\mathcal{O}_{D,0})[[b]]$ qui n'est pas un germe à l'origine de section du faisceau $\mathcal{O}_D[[b]]$. □

PREUVE DE LA PROPOSITION 7.2.1. Soit U un voisinage de l'origine dans D, et soient $f_1, \cdots, f_m$ des éléments de $\mathcal{O}(U)[[b]]$. On s'intéresse au module des relations entre ces éléments. On veut montrer qu'il existe un voisinage ouvert $V \subset U$ de l'origine et des éléments $R^1, \cdots, R^p \in \mathcal{O}(V)[[b]]^m$ vérifiant

$$\sum_{j=1}^{m} R_j^q.f_j = 0 \quad \text{dans} \quad \mathcal{O}(V)[[b]] \quad \forall q \in [1,p],$$

et tels que pour tout ouvert $W \subset V$ et toute relation $A := (a_1, \cdots, a_m) \in \mathcal{O}(W)[[b]]^m$ entre les $f_1, \cdots, f_m$ (c'est à dire vérifiant $\sum_1^m a_j.f_j = 0$) il existe $(h_1, \cdots, h_p) \in \mathcal{O}(W)[[b]]^p$ vérifiant $A = \sum_1^p h_q.R^q$.
Nous allons montrer ceci par récurrence sur l'entier $m \in \mathbb{N}$.

Première étape. Comme la multiplication par b est injective dans $\mathcal{O}_D[[b]]$, on peut toujours supposer que l'idéal engendré par $f_1^0, \cdots, f_m^0$ dans $\mathcal{O}(U)$ n'est pas réduit au voisinage de l'origine, où nous avons posé

$$f_j := \sum_{\nu=0}^{\infty} f_j^\nu.b^\nu \quad \text{pour} \quad j \in [1,m].$$

Quitte à se restreindre à un disque ouvert $V \subset U$ de centre 0, on peut supposer que cet idéal est (z^k) avec $k \geq 0$. Quitte à modifier f_1 par un inversible de $\mathcal{O}(V)$, ce qui ne change pas le module des relations que l'on calcule (à isomorphisme près), on peut supposer que $f_1^0 = z^k$.

Seconde étape. Notons par E_k l'espace vectoriel des polynômes de degré au plus $k-1$ en z. Alors pour tout $f \in \mathcal{O}(V)[[b]]$ il existe un unique $\Phi \in E_k[[b]] \simeq \mathcal{O}_D[[b]]/z^k.\mathcal{O}_D[[b]]$ et un unique $g \in \mathcal{O}(V)[[b]]$ vérifiant $f = \Phi + g.f_1$.
On remarquera que pour $k = 0$ on a $E_k = (0)$ et la division ci-dessus dit simplement que f_1 est un inversible dans ce cas. La recurrence sur m "avance" immédiatement dans ce cas. La preuve de la division ci-dessus est un exercice simple laissé au lecteur.

Troisième étape. On divise chaque f_j par f_1, c'est à dire que l'on écrit

$$f_j = \Phi_j + g_j.f_1 \quad \forall j \in [2,m].$$

Il est immédiat de voir que le module des relations entre $f_1, \cdots, f_m$ est alors isomorphe au module des relations entre $f_1, \Phi_2, \cdots, \Phi_m$. De plus, si tous les $\Phi_j, \forall j \in [2,m]$, sont dans $b.\mathcal{O}(V)[[b]]$, une relation $a_1 f_1 + \sum_2^m a_j.\Phi_j = 0$ implique que $a_1 \in b.\mathcal{O}(V)[[b]]$. On en conclut facilement que si on a $\Phi_j = b^l.\Psi_j, \forall j \in [2,m]$, avec l maximal et $\Psi_j \in E_k[[b]], \forall j \in [2,m]$, le module des relations entre $f_1, \Phi_2, \cdots, \Phi_m$ est isomorphe au module des relations entre $f_1, \Psi_2, \cdots, \Psi_m$. Mais maintenant l'idéal engendré par $f_1^0, \Psi_2^0, \cdots, \Psi_m^0$ est de la forme $(z^{k'})$ avec $k' < k$, puisque les Ψ_j^0 ne sont pas tous nuls. On se ramène ainsi, après avoir éventuellement restreint la situation à un disque ouvert de centre 0 plus petit, par une récurrence descendante sur k, au cas où $k = 0$. Alors la récurrence sur m "avance" comme on l'a déja vu plus haut. Il est important de remarquer que l'on restreint le disque de centre 0 considéré qu'un nombre fini de fois durant cette démonstration. ■

Terminons ce paragraphe en remarquant que pour tout ouvert $U \subset D$ on a $H^i(U, \mathcal{O}_D[[b]])$ $\forall i \geq 1$. En effet, la résolution (fine) de Dolbeault

$$0 \to \mathcal{O}_D[[b]] \to \mathcal{C}^{\infty,0}[[b]] \xrightarrow{\bar{\partial}} \mathcal{C}^{\infty,1}[[b]] \to 0$$

est encore exacte, et elle donne une suite exacte de sections sur tout ouvert (qui est automatiquement de Stein).

7.2.2 Finitude.

Donnons un critère suffisant simple pour qu'un $\mathcal{O}_D[[b]]-$module $\mathcal{F}$ soit cohérent.

Proposition 7.2.2 *Soit $\mathcal{F}$ un $\mathcal{O}_D[[b]]-$module vérifiant les propriétés suivantes:*

1. *L'application $b : \mathcal{F} \to \mathcal{F}$ est injective.*
2. *Le faisceau $\mathcal{F}$ est séparé pour la topologie $b-$adique. C'est à dire que pour tout ouvert $U \subset D$ on a $\cap_{\nu\geq 0}\, b^\nu\Gamma(U, \mathcal{F}) = (0)$.*
3. *Le faisceau de $\mathcal{O}_D-$modules $\mathcal{F}/b.\mathcal{F}$ est $\mathcal{O}_D-$cohérent.*

Alors $\mathcal{F}$ est $\mathcal{O}_D[[b]]-$cohérent.
Si, de plus, le faisceau $\mathcal{F}/b.\mathcal{F}$ est localement libre (de type fini) sur $\mathcal{O}_D$ alors $\mathcal{F}$ sera localement libre (de type fini) sur $\mathcal{O}_D[[b]]$.

PREUVE. Commençons par traiter le cas où $\mathcal{F}$ vérifie les conditions demandées sur le voisinage ouvert $U \subset D$ de l'origine, avec de plus, un isomorphisme de $\mathcal{O}_D-$modules $\mathcal{F}/b.\mathcal{F} \simeq (\mathcal{O}_D)^k$ sur U. Soit $\tilde{e}_1, \cdots, \tilde{e}_k$ la $\mathcal{O}_D-$base correspondante de $\mathcal{F}/b.\mathcal{F}$. Soit $V \subset U$ un disque de centre 0 sur lequel on dispose de $e_1, \cdots, e_k$ dans $\Gamma(V, \mathcal{F})$ relevant (sur V) $\tilde{e}_1, \cdots, \tilde{e}_k$.
Montrons qu'alors le morphisme de faisceaux de $\mathcal{O}_D[[b]]-$modules

$$\varphi : (\mathcal{O}_D[[b]])^k \to \mathcal{F}_{|V}$$

donné par $\varphi(s_1, \cdots, s_k) = \sum_1^k s_j.e_j$, est un isomorphisme sur V.
Il est injectif, car si $\sum_1^k s_j.e_j = 0$ on aura $\sum_1^k \tilde{s}_j.\tilde{e}_j = 0$ où $\tilde{s}$ désigne l'image de $s \in \mathcal{O}_D[[b]]$ dans $\mathcal{O}_D \simeq \mathcal{O}_D[[b]]/b.\mathcal{O}_D[[b]]$. On en conclut, puisque $\tilde{e}_1, \cdots, \tilde{e}_k$ est $\mathcal{O}_D-$libre, que chaque s_j est dans $b.\mathcal{O}_D[[b]]$. L'injectivité s'en déduit facilement d'après la condition 1).
Pour montrer la surjectivité, considérons $f \in \Gamma(W, \mathcal{F})$ où $W \subset V$ est un ouvert.

Supposons construits, pour $n \in \mathbb{N}$ des éléments $a_j^n := \sum_0^n a_{j,\nu}.b^\nu \in \Gamma(W, \mathcal{F})$ où $a_{j,\nu} \in \Gamma(W, \mathcal{O}_D)$ pour $j \in [1, k]$, vérifiant[19]

$$f - \sum_1^k a_j^n.e_j = b^{n+1}.g_n \quad \text{avec} \quad g_n \in \Gamma(W, \mathcal{F}).$$

Ecrivons $g_n = \sum_1^k a_{j,n+1}.e_j + b.g_{n+1}$ sur W. Posons alors $a_j^{n+1} := a_j^n + a_{j,n+1}.b^{n+1}$. On obtient $f - \sum_1^k a_j^{n+1}.e_j = b^{n+2}.g_{n+1}$, sur W. On construit ainsi par récurrence des a_j^n qui convergent dans $\Gamma(W, \mathcal{O}_D[[b]]) \simeq \Gamma(W, \mathcal{O}_D)[[b]]$ vers $a_1, \cdots, a_k$ qui vérifient

$$f - \sum_1^k a_j.e_j \in \cap_\nu \ b^\nu \Gamma(W, \mathcal{F}) = (0)$$

d'après la condition 2) (et la note en bas de page ci-dessus).
Traitons maintenant le cas général, c'est à dire en supposant seulement que $\mathcal{F}/b.\mathcal{F}$ est cohérent. Le problème est local sur D. On peut donc supposer que la torsion de ce faisceau cohérent est portée par l'origine. Définissons

$$\mathcal{G} := \{s \in \mathcal{F} / \exists l \in \mathbb{N} \text{ tq } \quad z^l.s = 0\}.$$

Montrons que l'on a une suite exacte

$$0 \to \mathcal{G}/b.\mathcal{G} \to \mathcal{F}/b.\mathcal{F} \to \mathcal{F}/b.\mathcal{F} + \mathcal{G} \to 0.$$

Le seul point qui n'est pas complètement évident est l'injectivité de la première flèche.
Soit $\gamma = b.\sigma \in \mathcal{G} \cap b.\mathcal{F}$; par définition, il existe $l \in \mathbb{N}$ tel que $z^l.\gamma = 0 = z^l b.\sigma$. L'injectivité de b donne alors $\sigma \in \mathcal{G}$.
Comme la torsion à l'origine de $\mathcal{F}/b.\mathcal{F}$ est un espace vectoriel de dimension finie qui contient $\mathcal{G}/b.\mathcal{G}$ (qui est un faisceau porté par l'origine, puisque c'est déja le cas pour $\mathcal{G}$), on en conclut que $\mathcal{G}/b.\mathcal{G}$ est également un espace vectoriel de dimension finie porté par l'origine. On montre alors, de façon analogue à ce qui a été fait dans le cas précédent, que l'on a un isomorphisme de $\mathcal{O}_D[[b]]-$modules

$$\psi : (\mathcal{G}/b.\mathcal{G})[[b]] \simeq \mathcal{G}.$$

La cohérence de $\mathcal{G}$ s'en déduit.
Considérons maintenant le faisceau quotient $\mathcal{Q} := \mathcal{F}/\mathcal{G}$. Il vérifie la condition 1) puisque l'on a vu que $b.\sigma \in \mathcal{G}$ implique $\sigma \in \mathcal{G}$ grâce à la condition 1) pour $\mathcal{F}$.
La condition 2) pour $\mathcal{Q}$ revient à montrer que l'on a $\cap_\nu(b^\nu \mathcal{F} + \mathcal{G}) = \mathcal{G}$. Mais si $\sigma \in b^\nu \mathcal{F} + \mathcal{G}$ il existe $l \in \mathbb{N}$ tel que $z^l.\sigma \in b^\nu \mathcal{F}$. De plus, d'après la description de $\mathcal{G}$ que l'on a obtenue, on peut choisir un l indépendant de ν (en fait ne dépendant

[19] L'injectivité de b montre que pour tout ouvert W on a $\Gamma(W, b.\mathcal{F}) = b.\Gamma(W, \mathcal{F})$. En effet, si $\sigma \in \Gamma(W, b.\mathcal{F})$ on peut localement écrire $\sigma = b.\tau_i$. Mais les τ_i se recollent nécessairement grâce à l'injectivité de b. De même $\forall \nu \geq 0 \quad \Gamma(W, b^\nu \mathcal{F}) = b^\nu.\Gamma(W, \mathcal{F})$.

que de $\mathcal{G}/b.\mathcal{G}$). On en conclut que $z^l.\sigma = 0$ et donc que $\sigma \in \mathcal{G}$.
Enfin le faisceau $\mathcal{Q}/b.\mathcal{Q}$ est le quotient du faisceau cohérent $\mathcal{F}/b.\mathcal{F}$ par sa torsion (au voisinage de l'origine au moins). Il est donc localement libre (de type fini) sur $\mathcal{O}_D$. On en conclut que $\mathcal{Q}$ est localement libre de type fini sur $\mathcal{O}_D[[b]]$ d'après la première partie de la démonstration. On en déduit la cohérence de $\mathcal{F}$ grâce à celle de l'algèbre $\mathcal{O}_D[[b]]$ montrée au paragraphe 7.2.1. ■

Le corollaire suivant est conséquence immédiate de la preuve précédente.

Corollaire 7.2.3 *Considérons un morphisme* $\mathcal{O}_D[[b]]-$*linéaire*

$$M : \mathcal{O}_D[[b]]^k \to \mathcal{O}_D[[b]]^l.$$

Alors le noyau $Ker\, M$ *est localement libre de type fini sur* $\mathcal{O}_D[[b]]$.

En effet les conditions 1), 2) de la proposition 7.2.2 sont clairement vérifiées par $Ker\, M$. De plus, la suite exacte $0 \to Ker\, M/b.Ker\, M \to \mathcal{O}_D^k \to \mathcal{O}_D^l$ montre que $Ker\, M/b.Ker\, M$ est $\mathcal{O}_D-$cohérent et sans $\mathcal{O}_D-$torsion, donc localement libre.

Une conséquence simple de ce qui précède est le fait que tout faisceau $\mathcal{O}_D[[b]]-$cohérent $\mathcal{F}$ admet localement une résolution

$$0 \to \mathcal{O}_D[[b]]^k \to \mathcal{O}_D[[b]]^l \to \mathcal{O}_D[[b]]^m \to \mathcal{F} \to 0.$$

Remarques.

1. Commençons par remarquer qu'un faisceau $\mathcal{O}_D[[b]]-$cohérent vérifie la condition 3) grâce à l'exactitude à droite du produit tensoriel par $\mathcal{O}_D[[b]]/b.\mathcal{O}_D[[b]]$.

2. Soit $\mathcal{F}$ un $\mathcal{O}_D[[b]]-$module (cohérent) vérifiant les conditions 1), 2) et 3) de la proposition 7.2.2. Alors on a $H^i(U, \mathcal{F}) = 0 \quad \forall i \geq 1$. En effet, cela résulte immédiatement de la preuve de la proposition et de la remarque qui conclut le paragraphe 7.2.1. □

3. Comme les conditions 1) et 2) passent aux sous-modules cohérents, tout sous-faisceau cohérent d'un faisceau de $\mathcal{O}_D[[b]]-$module vérifiant les propriétés 1), 2) et 3) vérifiera également ces propriétés.

4. Si on dispose, en plus des propriétés 1), 2) et 3), d'une $\mathcal{O}_D-$connexion $\tilde{\nabla}$ commutant à b, sur le faisceau $\mathcal{F}$, alors $\mathcal{F}$ sera localement libre sur $\mathcal{O}_D[[b]]$. En effet, le faisceau $\mathcal{F}/b.\mathcal{F}$ qui est $\mathcal{O}_D-$cohérent sera muni de la connexion induite, et sera donc localement libre sur $\mathcal{O}_D$.

8 Références

- [B.82] Barlet, D. *Développements asymptotiques des fonctions obtenues par intégration dans les fibres*, Inv. Math. vol.68 (1982), p.129-174.
- [B.85] Barlet, D. *La forme hermitienne canonique sur la cohomologie de la fibre de Milnor d'une hypersurface à singularité isolée*, Invent. Math. 81 (1985) p.115-153 .
- [B.91] Barlet, D. *Emmêlements de strates consécutives pour les cycles évanescents*, Ann. Scient. ENS 4-ième série 24 (1991) p.401-506.
- [B.93] Barlet, D. *Théorie des* $(a, b)-$*modules I*, in Complex Analysis and Geometry, Plenum Press, (1993), p 1-43.
- [B.95] Barlet, D. *Théorie des* $(a, b)-$*modules II. Extensions.* Complex Analysis and Geometry, Pitman Research Notes in Math. Series 366, (Trento 95), p.19-59, Longman (1997)
- [B.97] Barlet, D. *La variation pour une hypersurface à singularité isolée relativement à la valeur propre 1*, Revue de l'Institut E. Cartan (Nancy) vol. 15 (1997), p.1-29.
- [B.02] Barlet, D. *Interaction de strates consécutives II*, Publ. RIMS (Kyoto) vol.41 n.1(2005), p.139-173.
- [B.04 a)] Barlet, D. *Sur certaines singularités non isolées d'hypersurfaces I*, preprint Institut E. Cartan 2004/ n^0 03, 47 pages. Nouvelle version acceptée pour publication au Bull. Soc. Math. France (2006).
- [B.04 b)] Barlet, D. *Interactions de strates consécutives pour les cycles évanescents III : Le cas de la valeur propre 1.* preprint de l'Institut E. Cartan (2004) n.38, 82 pages. Nouvelle version acceptée pour publication dans Manuscripta Math. (2006)
- [B.05 a)] Barlet, D. *Modules de Brieskorn et formes hermitiennes pour une singularité isolée d'hypersurface.* Revue de l'Institut E. Cartan (Nancy) vol.18 (2005), p.19-46.
- [B.05 b)] Barlet, D. *Sur certaines singularités non isolées d'hypersurfaces II*, preprint Institut E. Cartan 2005 $n^0$42, 47 pages ; c'est la première version de cet article.
- [B.06 a)] Barlet, D. Note aux CRAS, soumise.
- [B.06 b)] Barlet, D. Finite determination for a regular (a,b)-module (en préparation).

- [B.S.04] Barlet, D. and Saito, M. *Brieskorn modules and Gauss-Manin systems for non isolated hypersurface singularities*, preprint Institut E. Cartan 2004/ n^0 54, 16 pages. A paraître à la London Math. Soc.

- [Be.01] Belgrade, R. *Dualité et Spectre des (a,b)-modules*, Journal of Algebra vol.245 (2001), p.193-224.

- [Br.70] Brieskorn, E. *Die Monodromie der isolierten Singularitäten von Hyperflächen*, Manuscripta Math. 2 (1970), p.103-161

- [K.75] Kashiwara, M. *On the maximally over determined systems of differential equations,* Publ. R.I.M.S. 10 (1975), p. 563-579.

- [M.62] Malgrange, B. *Systèmes différentiels à coefficients constants*, Seminaire Bourbaki 15 (1962-1963) exposé 246.

- [M.74] Malgrange,B. *Intégrale asymptotique et monodromie,* Ann. Sc. Ec. Norm. Sup. 7 (1974), p. 405-430.

- [Se.70] Sebastiani, M. *Preuve d'une conjecture de Brieskorn* Manuscripta Math. 2 (1970), p.301-308.

- [S.K.K.] Sato, M., Kawai, T. and Kashiwara, M. *Microfunctions and pseudo-differential equations*, Lecture Notes in Math. 287, Springer-Verlag, 1973, p. 264-529.

- [Sa.91] Saito, Morihiko *Period mapping via Brieskorn modules*, Bull. Soc. Math¿ France vol. 119 n.2 (1991), p.141-171.

Daniel Barlet, Institut Elie Cartan UMR 7502
Nancy-Université, CNRS, INRIA et Institut Universitaire de France,
BP 239 - F - 54506 Vandoeuvre-lès-Nancy Cedex.France.
e-mail : barlet@iecn.u-nancy.fr